

南山

柯西不等式与排序不等式

上海教育出版社

柯西不等式与排序不等式

南　山 编著

上海教育出版社出版发行

（上海永福路123号）

各地新华书店经销　　上海市印刷四厂印刷

开本787×1092 1/32　印张10.25　字数226,000

1996年3月第1版　　1996年3月第1次印刷

印数1—2,600本

ISBN 7-5320-3943-9/G·3853　　定价：9.50元

前言

不等式是中学数学中的重要内容之一，也是解题的一种十分重要的思想方法，它的应用十分广泛．而柯西不等式又是不等式的理论基础和基石，从近几年的国内外各级数学竞赛试题可以看出，许多有关不等式的试题，若能适当地利用柯西不等式来求解，可以使问题获得相当简便的解法．在这本小册子里，我们通过大量的典型的各级数学竞赛题，介绍了应用柯西不等式解题的几种常用技巧以及在解等式、不等式、极值、几何问题等方面的应用，并对部分试题作了一般性的推广．在第十、十一两节里介绍了柯西不等式的几种重要变形和推广形式，并通过具体例子，说明了它们的重要应用．

排序不等式是许多重要不等式的来源，如算术-几何平均不等式、算术-调和平均不等式、柯西不等式、切比雪夫不等式等都是它的直接推论，可以说它是一个“母不等式”，而且它本身也是解许多高难竞赛题的一个有力工具，因此，在本书第十二节里着重阐述了这方面的内容，并结合例子介绍了排序思想的应用．在第十三节中，我们还介绍了解竞赛题的另一个著名不等式——切比雪夫不等式的应用．

本书中的例题，大都选自国内外数学竞赛中的典型试题，特别是IMO试题、IMO备选题、CMO试题、中国国家集训队选拔试题和美国、加拿大的竞赛试题，同时参阅了大量的书刊，在此向他们表示诚挚的谢意．

通过阅读本书，可以发现在一个问题的众多解法中，利用

柯西不等式来解，其方法往往是最简捷的．因此，正确地理解和掌握柯西不等式的应用技巧，掌握它的结构特征是每一位参赛选手应必备的知识．

由于本人水平有限，加上时间仓促，书中定会存在许多不当之处，诚请广大读者指正．

编　者

一九九三年十二月

目　录

一、柯西-许瓦尔兹不等式

六年制重点中学高中《代数》第二册“不等式”一章的习题中，有这样一道题(P.94 练习第2题)：

求证：$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$. (1.1)

这道题用比较法是很容易证明的.

事实上，当 $ac+bd<0$ 时，结论显然成立.

当 $ac+bd\geqslant0$ 时，由于

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2\\
&\quad=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2-(a^2c^2+b^2d^2+2abcd)\\
&\quad=(ad)^2+(bc)^2-2abcd=(ad-bc)^2\geqslant0.
\end{aligned}
$$

所以，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$. 由不等式的性质，两边开平方即得所证.

(1.1)式还可以用求比值法来证明.

当 $a=b=0$(或 $c=d=0$)时，显然成立;

假设 $a^2+b^2\neq0$ 且 $c^2+d^2\neq0$，则

$$
\begin{aligned}
&\frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\\
&\quad\leqslant\frac{|ac|+|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\\
&\quad=\frac{|ac|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\\
&\quad=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{c^2}{c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{d^2}{c^2+d^2}}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{d^2}{c^2+d^2}\right)$$

$$=1.$$

故 $ac+bd\leqslant|ac+bd|$

$$\leqslant|ac|+|bd|\leqslant\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}.$$

(1.1)式就是著名的柯西-许瓦尔兹(Cauchy-Schwarz)不等式的一个简单特例.

柯西-许瓦尔兹不等式的一般形式为

对任意的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right), \tag{1.2}$$

或

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}. \tag{1.3}$$

其中等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立(当 $b_k=0$ 时，认为 $a_k=0$, $1\leqslant k<n$).

下面介绍柯西-许瓦尔兹不等式的几种证法.

证法1(求差——配方法) 因不等式(1.2)的右边

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+\sum_{i\neq j}^{n}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2),$$

不等式(1.2)的左边

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2+2\sum_{i\neq j}^{n}a_ib_ia_jb_j.$$

所以，右边－左边 $=\sum_{i\neq j}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant0$.

故 右边$\geqslant$左边，

其中等号仅当 $a_ib_j=a_jb_i$ $(i, j=1, 2, \cdots, n, i\neq j)$ 时成立.

$$\because\quad b_i\neq0\quad(i=1, 2, \cdots, n),$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

证法2(比值法)　当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ (或 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$) 时显然成立；当 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}b_i^2\neq 0$ 时，则

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}$$

$$\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k b_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\frac{b_k^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\frac{b_k^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)=1.$$

$$\therefore \quad \left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

其中等号成立的充分必要条件是

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i|, \tag{1.4}$$

$$\frac{a_k^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}=\frac{b_k^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.5}$$

(1.4)式成立的充分必要条件是 $a_i b_i\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即 a_i 与 b_i 同号. (1.5)式成立的充分必要条件是

$$a_k^2/b_k^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big/\sum_{i=1}^{n}b_i^2\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

注意到 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 与 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ 均为常数，故(1.3)式成立的充分必要条件是

$$\frac{|a_k|}{|b_k|}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}=\text{常数}.$$

又因 a_k 与 b_k 同号($k=1, 2, \cdots, n$)，故

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

证法3(判别式法)　i) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都等于0，不等式显然成立(并成立等号).

ii) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个不为0，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2>0.$$

又二次三项式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot x^2+2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\cdot x+\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2\geqslant 0.$$

$\therefore$　二次三项式的判别式

$$\Delta=4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2-4\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2\leqslant 0,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

等号当且仅当 $a_i x+b_i=0$($i=1, 2, \cdots, n$)时成立.

$$\because\quad b_i^2\neq 0,$$

$$\therefore\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

证法4$\left(\text{利用不等式 } xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\text{ 证明}\right)$.

如果 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2=0$ 或 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2=0$，由于 a_i, b_i 全为实数，由此得出 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，或者 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$. 这时(1.2)式等号成立. 所以，我们只须讨论 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2>0$ 并且 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2>0$.

在这种情况下，取正数 λ，使

$$\lambda^2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

对每个 i, $a_ib_i=(\lambda a_i)\left(\frac{1}{\lambda}b_i\right)\leqslant\left(\lambda^2a_i^2+\frac{1}{\lambda^2}b_i^2\right)\Big/2$，式中等号当且仅当 $\lambda^2=b_i/a_i$ 时成立. 对 $i=1, 2, \cdots, n$ 求和，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\leqslant\left[\lambda^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]\Big/2.$$

由于 λ 的取法将使上式的右边变为 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$，即有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

等号成立的条件显然是 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

证法 **5**(数学归纳法)　我们可以证明更强的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{1.6}$$

当 $n=1$ 时，(1.6)式显然成立；当 $n=2$ 时，(1.6)即为(仿照(1.1)式可证)

$$|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}. \tag{1.7}$$

假设 $n=k$ 时，(1.6)式成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2+b_{k+1}^2}\end{aligned}$$

$$\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}+|a_{k+1}b_{k+1}|$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{k}|a_ib_i|+|a_{k+1}b_{k+1}|=\sum_{i=1}^{k+1}|a_ib_i|.$$

所以，(1.6)式对一切自然数 n 成立。当然更有(1.3)式成立。

证法6(数学归纳法)

(i) 当 $n=1$, 2 时不等式(1.2)显然成立；

(ii) 假设 $n=k$ 时，不等式成立。即

$$\left(\sum_{i=1}^{k}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}b_i^2\right).$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}$ 时等号成立。

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_ib_i\right)^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}a_ib_i\right)^2+2a_{k+1}b_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ib_i\right)+a_{k+1}^2b_{k+1}^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sum_{i=1}^{k}b_i^2+2a_{k+1}b_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ib_i\right)+a_{k+1}^2b_{k+1}^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sum_{i=1}^{k}b_i^2+a_1^2b_{k+1}^2+b_1^2a_{k+1}^2+\cdots+a_k^2b_{k+1}^2$$

$$+b_k^2a_{k+1}^2+a_{k+1}^2b_{k+1}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}a_i^2\sum_{i=1}^{k+1}b_i^2.$$

当且仅当 $a_1b_{k+1}=b_1a_{k+1}$，$a_2b_{k+1}=b_2a_{k+1}$，…，$a_kb_{k+1}=b_ka_{k+1}$，即 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ 时等号成立。于是 $n=k+1$ 时，不等式成立。

由(i)、(ii)知，对所有自然数 n，不等式都成立。

证法 7（行列式法）

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2$$

$$=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_ib_i \\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & b_i^2 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_j^2 & a_ib_i \\ a_jb_j & b_i^2 \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_j b_i\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix},$$

又
$$D=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_i b_j\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_i b_j(-1)\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j(-1)\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix}.$$

$$\therefore\quad 2D=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j b_i-a_i b_j)\begin{vmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_jb_i-a_ib_j)^2\geqslant 0.$$

$\therefore\ D\geqslant 0$，即原不等式成立.

证法 8　根据问题结构特点，可构造如下的数列

$\{T_n\}$：$(a_1b_1)^2-a_1^2b_1^2$，$(a_1b_1+a_2b_2)^2-(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$，$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，…，$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$，…

从而可得：

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}-T_n=&\left[(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1})^2\right.\\
&-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2)\\
&\left.\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2+b_{n+1}^2)\right]\\
&-\left[(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\right.\\
&\left.-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\right]\\
=&2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}\\
&+a_{n+1}^2b_{n+1}^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)b_{n+1}^2\\
&-a_{n+1}^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-a_{n+1}^2b_{n+1}^2\\
=&-\left[(a_1b_{n+1}-b_1a_{n+1})^2\right.\\
&+(a_2b_{n+1}-b_2a_{n+1})^2+\cdots\\
&\left.+(a_nb_{n+1}-b_na_{n+1})^2\right]\leqslant 0,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$\therefore\quad T_{n+1}\leqslant T_n.$$

所以数列$\{T_n\}$单调递减，而$T_1=(a_1b_1)^2-a_1^2b_1^2=0$,

$$\therefore\quad T_n\leqslant 0.$$

即
$$
\begin{aligned}
&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\\
&\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).
\end{aligned}
$$

从(1.8)式中看出当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$时，等号成立.

柯西-许瓦尔兹不等式也叫做柯西-布尼雅可夫斯基(Cauchy-Буняковский)不等式(在本书中，后面简称为柯西不等式).

在复数域中，柯西不等式也是成立的. 即：设a_i, $b_i(i=1,2,\cdots,n)$是任意复数，则

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\geqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2. \tag{1.9}$$

(1.9)式的证明，也只是涉及到复数的基本知识，下面给

出几种证法.

证法 1 用数学归纳法.

首先,证明当 $n=2$($n=1$ 时显然成立)时,(1.9)式成立,即有

$$|a_1 b_1+a_2 b_2|^2 \leqslant (|a_1|^2+|a_2|^2)(|b_1|^2+|b_2|^2). \quad (1.10)$$

由复数的模与共轭复数的关系可知

$$|a_1 b_1+a_2 b_2|^2=(a_1 b_1+a_2 b_2)(\bar{a}_1 \bar{b}_1+\bar{a}_2 \bar{b}_2),$$

$$|a_1 \bar{b}_2-a_2 \bar{b}_1|^2=(a_1 \bar{b}_2-a_2 \bar{b}_1)(\bar{a}_1 b_2-\bar{a}_2 b_1).$$

将上面两式右端按复数乘法法则展开,并将左右两端分别相加,得

$$|a_1 b_1+a_2 b_2|^2=(|a_1|^2+|a_2|^2)(|b_1|^2+|b_2|^2)-|a_1 \bar{b}_2-a_2 \bar{b}_1|^2, \quad (1.11)$$

由此知(1.10)式成立.

假设 $n=k$ 时,(1.9)式成立,即有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}|a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k}|b_i|^2,$$

现证 $n=k+1$ 时,(1.9)式也成立.

$$\because \quad \left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right|^2=\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i+a_{k+1} b_{k+1}\right|^2$$

$$\leqslant\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right|+|a_{k+1} b_{k+1}|\right)^2,$$

由归纳假定,知

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}|a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|a_{k+1}|^2 \cdot|b_{k+1}|^2$$

$$+2|a_{k+1} b_{k+1}| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k}|b_i|^2}. \quad (1.12)$$

因为对任意两个非负实数 x, y,有 $2xy \leqslant x^2+y^2$,故

$$2|a_{k+1} b_{k+1}| \sqrt{\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k}|b_i|^2}$$

$$=2|a_{k+1}|\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2}\cdot|b_{k+1}|\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2}$$

$$\leqslant|a_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|b_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2.$$

再由(1.12)得

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2+\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|a_{k+1}|^2\cdot|b_{k+1}|^2$$

$$+|a_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2+|b_{k+1}|^2\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2,$$

即
$$\left|\sum_{i=1}^{k}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{k+1}|b_i|^2.$$

可见 $n=k+1$ 时，(1.9)式也成立.

由数学归纳法，对任何自然数 n，均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2.$$

证法 2 利用拉格朗日(Lagrange)恒等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$$

$$-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2. \tag{1.13}$$

事实上，有
$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i\bar{b}_i,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2$$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i)(\bar{a}_i b_j-\bar{a}_j b_i),$$

将上面两式两端分别相加，移项即得(1.13)式.

由(1.13)式立即推出(1.9)式成立，即有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2.$$

证法 3 $\because$ $\sum_{i=1}^{n}|a_i-t\bar{b}_i|^2$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-t\bar{\beta}_i)(\bar{\alpha}_i-\bar{t}\beta_i)\\
&=\sum_{i=1}^{n}[|\alpha_i|^2-2\mathrm{Re}(\bar{t}a_i b_i)+|t|^2|\beta_i|^2]\\
&=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2-2\mathrm{Re}\Big(\bar{t}\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\Big)\\
&\quad+|t|^2\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2\geqslant 0. \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

首先，当$\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2=0$时，$\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$全为0，所以(1.9)式自然成立.

现在考虑$\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2\neq 0$时的情形，因为$t$可取任意复数，(1.14)式均成立，所以在该式中令

$$
t=\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\Big/\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2,
$$

则(1.14)式右端化成

$$
\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2-2\mathrm{Re}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{a_i b_i}}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)
$$

$$
+\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\geqslant 0.
$$

因为某一复数变成实数时，它的实部即为此复数本身，所以上述不等式变成

$$
\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2-2\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}+\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2}\geqslant 0,
$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2-\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|^2\Big/\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\geqslant 0.$$

因此，(1.9)式成立，即有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2.$$

(1.9)式中等号成立当且仅当(1.14)式中的 $|a_i - t\bar{b}_i|$ ($i=1, 2, \cdots, n$)全为0时，即只有当 $\frac{a_1}{\bar{b}_1}=\frac{a_2}{\bar{b}_2}=\cdots=\frac{a_n}{\bar{b}_n}$ 时，(1.9)式等号成立.

柯西不等式的许多特例，它们本身就是一些重要的不等式，并且有许多重要的应用.

在(1.2)式中，用 a_i 替换 a_i^2，$\frac{1}{a_i}$ 替换 b_i^2，即可得到

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2. \quad (1.15)$$

(1.15)式对一切正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成立. 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$时，(1.15)式取等号.

由(1.15)式，得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}. \quad (1.16)$$

(1.16)式表明 n 个正数的算术平均值不小于它们的调和平均值，当且仅当各 a_i ($i=1, 2, \cdots, n$)都相等时，(1.16)式取等号.

又知，如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \quad (1.17)$$

此式表明 n 个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值，当且仅当各 a_i 都相等时，(1.17)式取等号.

以 $\frac{1}{a_i}$ 代换 a_i，(1.17)式即为

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geqslant\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}},$$

亦即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}. \tag{1.18}$$

(1.18)式对一切正数 a_1, a_2, …, a_n 都成立. 这表明 n 个正数的几何平均值不小于它们的调和平均值, 当且仅当各 a_i 都相等时(1.18)式取等号.

由(1.16)、(1.17)、(1.18)可得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}. \tag{1.19}$$

在不等式(1.2)中, 若 a_i 为正实数, 取 $b_i=1(i=1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2),$$

或

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2\leqslant\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}. \tag{1.20}$$

由(1.20)式立即推得 n 个正数的算术平均值不大于这 n 个数的平方的算术平均值的平方根, 即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}. \tag{1.21}$$

特别值得注意的是, 对于柯西不等式, 可以嵌入未定因子, 即: 对任意的 $\lambda_i>0$, 成立不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i a_i)(\lambda_i^{-1} b_i)\right]^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-2} b_i^2\right). \qquad (1.22)$$

当且仅当 $\frac{b_1}{\lambda_1^2 a_1} = \frac{b_2}{\lambda_2^2 a_2} = \cdots = \frac{b_n}{\lambda_n^2 a_n}$ 时等号成立.

对于这一含有任意参数的柯西不等式，优点在于可以根据需要在必要时选定 λ_i 的值，恰到好处地解决一些问题.

有了柯西不等式，高级中学课本《代数》(甲种本)第二册《不等式》一章的许多问题都能得到很简捷的证明.

例1(习题六第13题) 已知 $a, b, c \in R^+$,

求证：$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c} \geqslant abc$.

证明 构造两组数：

$$ab,\ bc,\ ca; \quad ca,\ ab,\ bc.$$

由不等式(1.3)，得

$$\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\sqrt{c^2a^2+a^2b^2+b^2c^2}$$
$$\geqslant ab\cdot ca+bc\cdot ab+ca\cdot bc,$$

即
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c),$$

$$\therefore \quad \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c} \geqslant abc.$$

例2(习题六第10题) 求证：

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant ab+bc+cd+da.$$

证明 取两组数：

$$a,\ b,\ c,\ d; \quad b,\ c,\ d,\ a.$$

由柯西不等式，得

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+a^2)$$
$$\geqslant (ab+bc+cd+da)^2,$$

即 $$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geqslant (ab+bc+cd+da)^2.$$

$$\because \quad a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant ab+bc+cd+da.$$

例 3（习题六第 11 题） 求证：

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

证明 构造两组数：

$$a,\ b;\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}.$$

由不等式(1.2)，得

$$(a^2+b^2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \geqslant \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2,$$

即 $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

例 4（习题六第 19 题） 已知 $a,\ b,\ c \in R^+$，求证：

(1) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right) \geqslant 9$；

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 9abc$.

证明 (1) 构造两组数：

$$\sqrt{\frac{a}{b}},\ \sqrt{\frac{b}{c}},\ \sqrt{\frac{c}{a}};\quad \sqrt{\frac{b}{a}},\ \sqrt{\frac{c}{b}},\ \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

由柯西不等式，得

$$\left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2\right]$$

$$\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2=3^2=9,$$

即 $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 9.$$

(2) $\because a、b、c\in R^+$，由柯西不等式得

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\\&=[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2](a^2+b^2+c^2)\\&\geqslant(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2\\&\geqslant(3\sqrt[3]{a\sqrt{a}\cdot b\sqrt{b}\cdot c\sqrt{c}})^2=9abc.\end{aligned}$$

例5（复习参考题三A组第12题） 已知

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1,\quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1.$$

求证：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1$.

证明 构造两组数：

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n;\quad x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n.$$

则 $$\begin{aligned}&(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2\\&\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2),\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1.$$

例6 甲、乙二人到同一个百货公司买同一种货物. 在不同的 n 个时刻 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$，单价分别是 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ 元. 甲购物的方式是：每一次买同样的数量 x；乙购物的方式是：每一次只买 p 元钱的东西. 证明：除非价格稳定，即 $p_1=p_2=\cdots=p_n$，乙购物的方式比甲购物的方式合算.

证明 所谓"合算"，显然是指乙购物的平均价格比甲购物的平均价格要低.

在 n 次购物中，甲花去 $p_1x+p_2x+\cdots+p_nx$ 元，总共买到了数量为 nx 的东西，因此平均价格为

$$\sum_{i=1}^{n}p_ix/nx=\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n};$$

在 n 次购物中，乙总共花去 np 元，买到了数量为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p}{p_i}$ 的

东西，因此平均价格为

$$\frac{np}{\sum_{i=1}^{n}\frac{p}{p_i}}=\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}.$$

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 不全相等，故由调和平均-算术平均不等式，得

$$\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}<\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}.$$

这就证完了所需要的结论.

下面我们来利用柯西不等式推导平行直线（平面）间的距离公式.

在平面直角坐标系中，设两平行直线：

$$l_1:\ Ax+By+C_1=0;\quad l_2:\ Ax+By+C_2=0.$$

点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 分别是 l_1, l_2 上任意两点，所以

$$Ax_1+By_1+C_1=0, \tag{1.23}$$

$$Ax_2+By_2+C_2=0. \tag{1.24}$$

(1.23)－(1.24) 得

$$A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)=C_2-C_1.$$

由柯西不等式知

$$(A^2+B^2)[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]$$
$$\geqslant[A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)]^2=(C_2-C_1)^2,$$

即
$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$\geqslant\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

等号当且仅当 $\frac{x_1-x_2}{A}=\frac{y_1-y_2}{B}$，即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{-A/B}$ 时成立. 故当 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{-A/B}$（即点 P_1, P_2 所在直线垂直

于 l_1, l_2)时 $|P_1P_2|$ 取最小值，所以

$$d=|P_1P_2|_{\min}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

此即我们熟知的 l_1 与 l_2 之间的距离公式.

对于空间两平行平面 π_1: $Ax+By+Cz+D_1=0$ 与 π_2: $Ax+By+Cz+D_2=0$，点 $P_1(x_1, y_1)\in\pi_1$，$P_2(x_2, y_2)\in\pi_2$，利用柯西不等式同样可证

$$|P_1P_2|\geqslant\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

等号当且仅当 $\frac{x_1-x_2}{A}=\frac{y_1-y_2}{B}=\frac{z_1-z_2}{C}$ 时（即点 P_1，P_2 所在直线是两平面的法线）成立. 故两平行平面之间的距离为

$$d=|P_1P_2|_{\min}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

二、柯西不等式的应用技巧

从上节中几个简单的例子可以看出，应用柯西不等式证题的关键是要善于构造两组数：

$a_1, a_2, \cdots, a_n;$

$b_1, b_2, \cdots, b_n.$

柯西不等式(1.2)的左端正好是这两组数对应项的乘积之和的平方，即$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$，右端的乘积中的每一项恰好是每组中诸数平方之和，即

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

例1 设$a, b, c\in R^+$，且$a+b+c=1$，

求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

（1978年广东省中学数学竞赛题）

分析 所证的不等式可以改写为$9\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. 应用柯西不等式来证明此题的关键是善于构造两组数，怎样才能构造出这两组数呢？这就需要对待求证的不等式的特点加以分析，它的左端是一个常数．因此，构造的两组数的对应项的乘积的和的平方为9，而待求证的不等式右端$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$可写成$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$. 于是，可设想构造如下两组数：

$$\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c};\quad \frac{1}{\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{b}},\ \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

由柯西不等式有

$$\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

$$\leqslant[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right],$$

$$\therefore\quad 9\leqslant(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

而
$$a+b+c=1,$$

故
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

当且仅当 $\sqrt{a}\Big/\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{b}\Big/\frac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{c}\Big/\frac{1}{\sqrt{c}}$ 时取等号，即 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，原不等式取等号.

例2 设 $\triangle ABC$ 为任意三角形，求证：

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1.$$

（1956 年上海市中学数学竞赛题）

分析 从所要证明的不等式出发，构造如下两组数：

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2};$$

$$1,\quad 1,\quad 1.$$

由柯西不等式(1.2)，得

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot 1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot 1+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot 1\right)^2$$

$$\leqslant\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)(1^2+1^2+1^2),$$

即
$$\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\leqslant \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}.$$

把上面这个不等式与求证的不等式比较，可知如果能推导出 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{3}$，问题就解决了．但是，$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\neq\sqrt{3}$，所以，这样构造的两组数不能证明求证的不等式成立，因此，应修正所构造的两组数如下：

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2};\ \operatorname{tg}\frac{B}{2},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2},\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

由柯西不等式，有

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2$$
$$\leqslant\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)$$
$$\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right),$$

即
$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2$$
$$\leqslant\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)^2.$$

把上面不等式与求证不等式比较，可知要证原不等式成立，须证

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$$

而这个等式经验证确实成立：

由于 $A+B+C=\pi$，$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$，

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

$$\therefore \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$$

于是 $$1\leqslant\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)^2,$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1.$$

由例2可知，在运用柯西不等式解题时，如果两组数构造得好，会使解法更简捷．否则，会事倍功半，达不到预期的目的．

在一个问题的众多解法中，利用柯西不等式的方法来解往往是最优的．因此，正确地理解柯西不等式，掌握它的结构特征，碰到棘手的问题，若能设法创造条件，灵活运用这一不等式，将会给解题带来很多方便．因此，下面就谈谈应用柯西不等式解题的一些常用技巧．

1．常数的巧拆

在运用柯西不等式时，根据题中的数值特征，注意巧拆常数是一种常用技巧．

例3　设 a、b、c 为正数且各不相等，求证：

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}>\frac{9}{a+b+c}.$$

分析　$9=(1+1+1)^2$，$2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a)$，9与2这两个常数的巧拆，给我们提供了运用柯西不等式的条件．

证明　$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=[(a+b)+(b+c)+(c+a)]$$
$$\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$
$$=[(\sqrt{a+b})^2+(\sqrt{b+c})^2+(\sqrt{c+a})^2]$$
$$\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{1}{a+b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b+c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{c+a}}\right)^2\right]$$
$$\geqslant\left(\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{\frac{1}{a+b}}+\sqrt{b+c}\cdot\sqrt{\frac{1}{b+c}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{c+a}\cdot\sqrt{\frac{1}{c+a}}\right)^2$$
$$=(1+1+1)^2=9,$$

$\therefore\quad \dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}.$

$\because\quad a$、b、c 各不相等,

$\therefore$　等号不可能成立,从而原不等式成立.

例 4　已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R^+$, $n\geqslant 2$, $n\in N$,求证:

$$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots+\frac{s}{s-a_n}\geqslant\frac{n^2}{n-1}.$$

(其中 $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$.)

证明　考虑到

$$(n-1)s=ns-s=ns-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$=(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots+(s-a_n)$$

及 $n^2=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}})^2$,有

$$[(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots+(s-a_n)]$$
$$\cdot\left[\frac{1}{s-a_1}+\frac{1}{s-a_2}+\cdots+\frac{1}{s-a_n}\right]$$

$$\geqslant\left[\sqrt{s-a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-a_1}}+\sqrt{s-a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-a_2}}\right.$$

$$\left.+\cdots+\sqrt{s-a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-a_n}}\right]^2$$

$$=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}})^2=n^2,$$

于是 $$(n-1)s\left[\frac{1}{s-a_1}+\frac{1}{s-a_2}+\cdots+\frac{1}{s-a_n}\right]\geqslant n^2,$$

即 $$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots+\frac{s}{s-a_n}\geqslant\frac{n^2}{n-1}.$$

例 5　设 $f(x)=\lg\dfrac{1^x+2^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x}{n}$，若 $0<a<1$，$n\in N$，且 $n\geqslant2$，求证：$f(2x)\geqslant2f(x)$.

（1990 年全国高考数学理科试题）

证明　考虑到 $n=\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n}$ 及 $a\geqslant a^2$，有：

$$n[1^{2x}+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+an^{2x}]$$

$$\geqslant(\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n})$$

$$\cdot(1^{2x}+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+(an^x)^2)$$

$$\geqslant(1^x+2^x+\cdots+(n-1)^x+an^x)^2,$$

即 $$\frac{1^{2x}+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+an^{2x}}{n}$$

$$\geqslant\left(\frac{1^x+2^x+\cdots+(n-1)^x+an^x}{n}\right)^2,$$

$$\lg\frac{1^{2x}+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+an^{2x}}{n}$$

$$\geqslant2\lg\frac{1^x+2^x+\cdots+(n-1)^x+an^x}{n},$$

亦即 $$f(2x)\geqslant2f(x).$$

2. 项的巧添

有些问题，从表面上看不能应用柯西不等式，但只要适当添加上常数项或和为常数的各项，就可以运用柯西不等式来解．这也是应用柯西不等式时经常采用的一种技巧．

例 6 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求 $\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$ 的最小值．

（1982 年西德数学奥林匹克试题）

解 易验证

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+1$$

$$=\frac{1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2-a_1}=\frac{2}{2-a_1}.$$

同理可得 $\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+1=\frac{2}{2-a_2}, \cdots,$

$$\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}+1=\frac{2}{2-a_n}.$$

令

$$y=\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}$$

$$+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}},$$

故

$$y+n=\frac{2}{2-a_1}+\frac{2}{2-a_2}+\cdots+\frac{2}{2-a_n}.$$

为了利用柯西不等式，注意到

$$(2-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(2-a_n)$$

$$=2n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=2n-1,$$

$$\therefore\quad (2n-1)\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right)$$

$$=[(2-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(2-a_n)]$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right]$$

$$\geqslant\left[\sqrt{2-a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-a_1}}+\sqrt{2-a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-a_2}}\right.$$

$$\left.+\cdots+\sqrt{2-a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-a_n}}\right]^2=n^2.$$

$$\therefore\quad y+n\geqslant\frac{2n^2}{2n-1},\quad y\geqslant\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}.$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$ 时成立，从而 y 有最小值 $\dfrac{n}{2n-1}$.

3．结构的巧变

有些问题本身不具备运用柯西不等式的条件，我们只要改变一下多项式形态结构，认清其内在的结构特征，就可以达到利用柯西不等式解题的目的.

例 7 设 $a_1>a_2>\cdots>a_n>a_{n+1}$，求证：

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n-a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+1}-a_1}>0.$$

这是高级中学课本代数第二册（甲种本）112 页复习参考题三第 9 题“已知 $a>b>c$，求证 $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}>0$”的推广.

分析 初看，似乎无法使用柯西不等式．但改变其结构，改为证：

$$(a_1-a_{n+1})\left[\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\right]>1.$$

为了运用柯西不等式，将 a_1-a_{n+1} 写成

$$a_1-a_{n+1}=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1}),$$

于是 $[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})]$

$$\cdot\left(\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\right)\geqslant n^2>1.$$

即 $$(a_1-a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\right)>1,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n-a_{n+1}}>\frac{1}{a_1-a_{n+1}},$$

故 $$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n-a_{n+1}}$$

$$+\frac{1}{a_{n+1}-a_1}>0.$$

4．位置的巧换

柯西不等式中诸量 a_i，b_i 具有广泛的选择余地，任意两个元素 a_i、a_j(或 b_i、b_j)的交换，可以得到不同的不等式，因此，在证题时根据需要重新安排各量的位置，这种形式上的变更往往给解题带来意想不到的方便．所以，这也是灵活运用柯西不等式的技巧之一．

例8 已知 a、$b\in R^+$，$a+b=1$，x_1，$x_2\in R^+$，求证：

$$(ax_1+bx_2)(bx_1+ax_2)\geqslant x_1x_2.$$

分析 如果对不等式左端用柯西不等式，就得不到所要证明的结论．若把第二个小括号内的前后项对调一下，情况就不同了．

证明 $$(ax_1+bx_2)(bx_1+ax_2)$$
$$=(ax_1+bx_2)(ax_2+bx_1)$$
$$\geqslant(a\sqrt{x_1x_2}+b\sqrt{x_1x_2})^2$$
$$=(a+b)^2x_1x_2=x_1x_2.$$

例9 设 a、b、x、y、$k\in R^+(k<2)$，且 $a^2+b^2-kab=1$，$x^2+y^2-kxy=1$，

求证：$|ax-by|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$，

$$|ay+bx-kby|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

证明 ∵ $a^2+b^2-kab=1$，

$$\therefore\quad\left(a-\frac{k}{2}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}\cdot b\right)^2=1.$$

同样得
$$\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}\cdot x\right)^2+\left(\frac{k}{2}x-y\right)^2=1.$$

运用柯西不等式，得

$$\left[\left(a-\frac{k}{2}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}b\right)^2\right]$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}x\right)^2+\left(\frac{k}{2}x-y\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left[\left(a-\frac{k}{2}b\right)\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}x+\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}b\left(\frac{k}{2}x-y\right)\right]^2$$

$$=\left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ax-by)\right]^2,$$

故
$$|ax-by|\leqslant 2/\sqrt{4-k^2}.$$

交换 x, y 的位置，并适当变号，注意到

$$\left(a-\frac{k}{2}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}b\right)^2=1,$$

及
$$\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}y\right)^2+\left(x-\frac{k}{2}y\right)^2=1.$$

运用柯西不等式：

$$\left[\left(a-\frac{k}{2}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}b\right)^2\right]$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}y\right)^2+\left(x-\frac{k}{2}y\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left[\left(a-\frac{k}{2}b\right)\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}y+\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}b\right.$$

$$\left.\cdot\left(x-\frac{k}{2}b\right)\right]^2$$

$$=\left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ay+bx-kby)\right]^2.$$

故得 $$|ay+bx-kby|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

5．因式的巧嵌

由于柯西不等式有三个因式，而一般题目中只有一个或两个因式，为了运用柯西不等式，我们需要设法嵌入一个因式（嵌入的因式之和往往是定值）.

例 10 已知 $a^2+b^2=1$，求证：$a\cos\theta+b\sin\theta\leqslant1$.

证明 $\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ a^2+b^2=1,$

$\therefore\ (a^2+b^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\geqslant(a\cos\theta+b\sin\theta)^2,$

即 $$1\geqslant(a\cos\theta+b\sin\theta)^2,$$

$$\therefore\ a\cos\theta+b\sin\theta\leqslant1.$$

例 11 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in R^+$，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

（1984 年全国高中数学联赛题）

证明 在不等式的左端嵌乘以因式 $(x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1)$，也即嵌乘以因式 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，由柯西不等式，得

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\right)(x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1)$$

$$=\left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_3}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n}}\right)^2+\left(\frac{x_n}{\sqrt{x_1}}\right)^2\right]$$

$$\cdot\left[(\sqrt{x_2})^2+(\sqrt{x_3})^2+\cdots+(\sqrt{x_n})^2+(\sqrt{x_1})^2\right]$$

$$\geqslant\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}\cdot\sqrt{x_2}+\frac{x_2}{\sqrt{x_3}}\cdot\sqrt{x_3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n}}\cdot\sqrt{x_n}+\frac{x_n}{\sqrt{x_1}}\cdot\sqrt{x_1}\right)^2$$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n)^2,$$

于是 $$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}$$

$$\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

利用这种证法，我们可以把例11推广成如下的形式：

设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是正数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的某一个排列，则有

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

6．待定参数的巧设

为了给运用柯西不等式创造条件，我们经常引进一些待定参数，其值的确定由题设或者由等号成立的充要条件共同确定．例如，前面的例9可用这种方法证明如下：

(1) 引进待定参数 $t\in R^+$，利用柯西不等式

$$4|ax-by|^2=|(a+b)(x-y)+(a-b)(x+y)|^2$$

$$=\left|[t(a+b)]\frac{x-y}{t}+(a-b)(x+y)\right|^2$$

$$\leqslant[t^2(a+b)^2+(a-b)^2]$$

$$\cdot\left[\frac{(x-y)^2}{t^2}+(x+y)^2\right]$$

$$=[(t^2+1)(a^2+b^2)+(2t^2-2)ab]$$

$$\cdot[(t^2+1)(x^2+y^2)+(2t^2-2)xy]/t^2.$$

令 $\frac{2t^2-2}{t^2+1}=-k$，即 $t^2=\frac{2-k}{2+k}$，$t=\frac{\sqrt{4-k^2}}{2+k}$，

$$\therefore\quad 4|ax-by|^2 \leqslant \frac{(t^2+1)^2}{t^2},$$

$$\therefore\quad |ax-by| \leqslant \frac{t^2+1}{2t} = \frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

(2) 引进待定参数 $\mu \in R^+$，由柯西不等式，

$$\begin{aligned}
&4|ay+bx-kby|^2 \\
&= |(2a-kb)y+(2x-ky)b|^2 \\
&= \left|(2a-kb)\mu\cdot\frac{y}{\mu}+(2x-ky)b\right|^2 \\
&\leqslant [\mu^2(2a-kb)^2+b^2]\left[\frac{y^2}{\mu^2}+(2x-ky)^2\right] \\
&= \frac{[\mu^2(2a-kb)^2+b^2][\mu^2(2x-ky)^2+y^2]}{\mu^2} \\
&= \frac{[4\mu^2a^2-4\mu^2kab+(k^2\mu^2+1)b^2]\cdot[4\mu^2x^2-4\mu^2kxy+(k^2\mu^2+1)y^2]}{\mu^2}.
\end{aligned}$$

为了利用条件，令 $4\mu^2=k^2\mu^2+1$，即 $\mu=\frac{1}{\sqrt{4-k^2}}$，

$$\therefore\quad 4|ay+bx-kby|^2 \leqslant (4\mu^2)^2/\mu^2=(4\mu)^2,$$

故 $$|ay+bx-kby| \leqslant 2\mu = \frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

例12 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\sin A+\sin B+5\sin C \leqslant \frac{\sqrt{198+2\sqrt{201}}(\sqrt{201}+3)}{40}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\because\quad &\sin A+\sin B+5\sin C \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+10\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \\
&= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+5\sin\frac{C}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\cos\frac{C}{2}\left(1+5\sin\frac{C}{2}\right).$$

当且仅当 $A=B$ 时等号成立.

令 $y=\cos x(1+5\sin x)\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，于是引进参数 $t>0$，求 $y^2=\cos^2 x(1+5\sin x)^2$ 的最值.

由柯西不等式:

$$y^2=\cos^2 x(1+5\sin x)^2=25\cos^2 x\left(\frac{1}{5}+\sin x\right)^2$$

$$=25\cdot\frac{\cos^2 x}{t^2}\left(\frac{1}{5}t+t\sin x\right)^2$$

$$\leqslant\frac{25\cos^2 x}{t^2}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+t^2\right](t^2+\sin^2 x)$$

$$=\frac{25t^2+1}{t^2}\cos^2 x(t^2+\sin^2 x).$$

又由平均值不等式 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$，得

$$y^2\leqslant\frac{25t^2+1}{t^2}\left(\frac{\cos^2 x+t^2+\sin^2 x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(25t^2+1)(t^2+1)^2}{4t^2}. \tag{2.1}$$

当且仅当

$$\begin{cases}\dfrac{1}{5t}=\dfrac{t}{\sin x},\\ \cos^2 x=t^2+\sin^2 x\end{cases} \tag{2.2}$$

时，(2.1)式等号成立，由(2.2)式消去 x 得

$$50t^4+t^2-1=0.$$

$$\because\quad t>0,\quad\therefore\quad t^2=\frac{-1+\sqrt{201}}{100},$$

$$t=\sqrt{\frac{\sqrt{201}-1}{100}}=\frac{\sqrt{\sqrt{201}-1}}{10}$$

$$\therefore\quad 2y \leqslant \frac{\sqrt{25t^2+1}\,(t^2+1)}{t}$$

$$=\frac{\sqrt{198+2\sqrt{201}}\,(\sqrt{201}+3)}{40},$$

故 $\sin A+\sin B+5\sin C \leqslant \dfrac{\sqrt{198+2\sqrt{201}}\,(\sqrt{201}+3)}{40}$.

例 13 (1) 设三个正实数 a, b, c 满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4),$$

求证：a, b, c 一定是某个三角形的三条边长。

(2) 设 n 个正实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4),\ (n\geqslant 3)$$

求证：这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

(1988 年第 3 届全国数学冬令营试题)

证明 (1) 由题设，得

$$2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2<0,$$

经化简并分解因式得

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)<0. \qquad (2.3)$$

下面来证明 $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$ 三者必同时成立. 否则，假定其中至少有一个不成立，不妨设 $a+b\leqslant c$. 因为 a, $b>0$, 所以有 $a<c$, $b<c$. 于是 $a+b-c\leqslant 0$, $a-b+c=a+(c-b)>a>0$, $a-b-c\leqslant(a-b)-(a+b)=-2b<0$, 这样一来，

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\geqslant 0,$$

这与(2.3)式矛盾. 由此看来必须同时有

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b,$$

这就表明 a, b, c 必为某三角形的三条边长.

(2) 对于 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 这 n 个正实数，任取三个，不妨

设为 a_1, a_2, a_3，由柯西不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^3 a_i^2}{2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^3 a_i^2}{2}+\sum_{j=4}^n a_j^2\right)^2$$

$$\leqslant\left[\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^3 a_i^2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^3 a_i^2}{2}\right)^2+\sum_{j=4}^n a_j^4\right](\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{共\ n-1\ 个})$$

$$=(n-1)\left[\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{2}+\sum_{j=4}^n a_j^4\right]. \qquad (2.4)$$

由(2.4)式及题设有

$$(n-1)\left[\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{2}+\sum_{j=4}^n a_j^4\right]>(n-1)\sum_{j=1}^n a_j^4.$$

化简后，得　$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$.

由(1)知 a_1, a_2, a_3 一定是某个三角形的三条边长.

上面是湖北罗小奎同学在当年冬令营中的证法，他的证法巧妙之处在于将三项之和化为两项之和，从而将本是 n 项之和的表达式化为 $n-1$ 项之和的表达式，应用柯西不等式时出现一个 $n-1$ 的因子，恰与另一方的相同因子消去．因而只用一次柯西不等式就解决了问题．由于他的证法构思精巧，从而获得了特别奖.

另证　由(1)利用含有任意参数 $\lambda>0$ 的柯西不等式，有

$(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2$

$$=\left[\lambda(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot\frac{1}{\lambda}+a_4^2+a_5^2+\cdots+a_n^2\right]^2$$

$$\leqslant[\lambda^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4]\left(\frac{1}{\lambda^2}+n-3\right).$$

为了将 $a_4, \cdots, a_n$ 从不等式中消去，令

$$\frac{1}{\lambda^2}+n-3=n-1, \quad \therefore\quad \lambda^2=\frac{1}{2},$$

代入得 $\qquad (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$.

7. 柯西不等式的反复运用

有些问题的解决需要多次反复利用柯西不等式才能达到目的，但在运用过程中，每运用一次前后等号成立的条件必须一致，不能前后自相矛盾，否则就会出现错误.

例 14 已知 a, b 为正常数，且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求 $y=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}$ 的最小值.

解 利用柯西不等式，得

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$\geqslant(\sqrt[3]{a}\sin x+\sqrt[3]{b}\cos x)^2.$$

等号成立当且仅当 $\sin x/\sqrt[3]{a}=\cos x/\sqrt[3]{b}$ 时，即

$$x=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

时，于是

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\geqslant\sqrt[3]{a}\sin x+\sqrt[3]{b}\cos x.$$

再由柯西不等式，得

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\left(\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\right)$$
$$\geqslant(\sqrt[3]{a}\sin x+\sqrt[3]{b}\cos x)\left(\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\right)$$
$$\geqslant\left(\sqrt[3]{a}\sqrt{\sin x}\sqrt{\frac{a}{\sin x}}+\sqrt[3]{b}\sqrt{\cos x}\sqrt{\frac{b}{\cos x}}\right)^2$$
$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2.$$

等号成立也是当且仅当 $x=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 时.

从而 $\qquad y=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\geqslant(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$,

于是 $y=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}$ 的最小值是 $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$.

8．变量代换的巧用

对于一些看上去很复杂的问题，我们需要引进适当的变量代换，从而可用柯西不等式来处理.

例 15 设 a, b, c 是三角形的边长，试证：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0, \qquad (2.5)$$

并说明等号何时成立.

(1983 年第 24 届 IMO 试题)

证明 令 $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$，于是要证的不等式转化为

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)$$
$$+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geqslant 0.$$

将上式化简，即得

$$xy^3+yz^3+zx^3\geqslant xyz(x+y+z),$$

即
$$\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geqslant x+y+z.$$

$$\because\quad \left[\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^2\right]$$
$$\cdot[(\sqrt{z})^2+(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2]$$
$$\geqslant\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z}+\frac{z}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}\right)^2$$
$$=(y+z+x)^2,$$

$$\therefore\quad \frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geqslant x+y+z.$$

等号成立的充要条件是 $x=y=z$，即 $a=b=c$，也即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

例 16 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数，$n\geqslant 2$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，求

证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

（1989 年全国数学冬令营试题）

证明　令 $y_i=1-x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}x_i=n,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{n}.$$

同理，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}\right)^2\leqslant n\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i=n\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)=n(n-1),$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}\leqslant\sqrt{n(n-1)}.$$

又由柯西不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[4]{y_i}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{y_i}}\right)^2=n^2,$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\geqslant n^2\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}}\geqslant\frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-y_i}{\sqrt{y_i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}$$

$$\geqslant\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}-\sqrt{n(n-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

三、证明恒等式

利用柯西不等式来证明恒等式，主要是利用其取等号的充分必要条件来达到目的，或者是利用柯西不等式进行夹逼的方法获证．

例 1 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，

求证：$a^2+b^2=1$．

证明 由柯西不等式，得

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$$
$$\leqslant[a^2+(1-a^2)][b^2+(1-b^2)]=1.$$

当且仅当 $\dfrac{b}{\sqrt{1-a^2}}=\dfrac{\sqrt{1-b^2}}{a}$ 时，上式取等号．

$$\therefore\quad ab=\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2},$$
$$a^2b^2=(1-a^2)(1-b^2),$$

于是 $$a^2+b^2=1.$$

例 2 已知 $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$，

求证：$\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$．

证明 $\because\ \cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，$\therefore$ 由柯西不等式得

$$\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\left(\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}\right)$$
$$\geqslant\left(\cos\beta\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}+\sin\beta\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}\right)^2$$
$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=1.$$

当且仅当 $\cos\beta \Big/ \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\beta} = \sin\beta \Big/ \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}$ 时上式取等号，即

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = 1,$$

$$\therefore\quad \sin^2\beta = \sin^2\alpha,\ \cos^2\beta = \cos^2\alpha.$$

$$\therefore\quad \frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

例 3 已知 α、$\beta \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，且

$$(1-\operatorname{tg}\beta)\sin\alpha + (1+\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha = \sqrt{2}\sec\beta,$$

求证：$\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$.

证明 由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&[(1-\operatorname{tg}\beta)\sin\alpha + (1+\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha]^2\\ &\quad\leqslant[(1-\operatorname{tg}\beta)^2 + (1+\operatorname{tg}\beta)^2][\sin^2\alpha+\cos^2\alpha]\\ &\quad=(2+2\operatorname{tg}^2\beta) = 2\sec^2\beta,\end{aligned}$$

即有

$$(1-\operatorname{tg}\beta)\sin\alpha + (1+\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha \leqslant \sqrt{2}\sec\beta.$$

由题设及柯西不等式取等号的条件可得

$$(1-\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha = (1+\operatorname{tg}\beta)\sin\alpha,$$

即有

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right).$$

$$\because\quad \alpha、\frac{\pi}{4}-\beta \in \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore\quad \alpha = \frac{\pi}{4}-\beta,\ 故有\ \alpha+\beta = \frac{\pi}{4}.$$

例 4 已知 a、b 为正数，且

$$\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{1}{a+b},$$

求证：$\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

证明　由已知条件得

$$(a+b)\left(\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}\right)=1.$$

由柯西不等式，得

$$(a+b)\left(\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}\right)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{b}}\right)^2$$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1.$$

当且仅当 $\sqrt{a}\Big/\dfrac{\sin^2\alpha}{\sqrt{a}}=\sqrt{b}\Big/\dfrac{\cos^2\alpha}{\sqrt{b}}$ 时上式取等号，

$$\therefore\quad \frac{\sin^2\alpha}{a}=\frac{\cos^2\alpha}{b}.$$

$$\therefore\quad \sin^2\alpha=\frac{a}{a+b},\ \cos^2\alpha=\frac{b}{a+b}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{a^3}\left(\frac{a}{a+b}\right)^4+\frac{1}{b^3}\left(\frac{b}{a+b}\right)^4$$

$$=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

利用柯西不等式，可以把例 4 推广为：

已知 $a,\ b\in R^+$，$n\in N$，且

$$\frac{\cos^4\alpha}{b^n}+\frac{\sin^4\alpha}{a^n}=\frac{1}{a^n+b^n},$$

求证：$\dfrac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}=\dfrac{1}{(a^n+b^n)^3}$.

例 5　已知 $A,\ B,\ C$ 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，且

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}=\frac{27}{\pi^2},$$

求证：$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{8}$.

证明

$$\because\quad \frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}$$

$$=\frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3\pi^2}(A+B+C)^2\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3\pi^2}\left[(A+B+C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\right]^2$$

$$\geqslant\frac{1}{3\pi^2}[(1+1+1)^2]^2=\frac{27}{\pi^2}.$$

当且仅当 $$1\Big/\frac{1}{A}=1\Big/\frac{1}{B}=1\Big/\frac{1}{C},$$

$$\sqrt{A}\Big/\frac{1}{\sqrt{A}}=\sqrt{B}\Big/\frac{1}{\sqrt{B}}=\sqrt{C}\Big/\frac{1}{\sqrt{C}}$$

时上式取等号，即 $A=B=C=60°$.

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}.$$

例 6 已知椭圆 $\frac{x^2}{(a+1)^2}+\frac{y^2}{(a-1)^2}=1$ 的切线交 x 轴、y 轴的正半轴于 M、N 两点，且 $|MN|=2a$，求这条切线的斜率.

解 如图 1，设有直线 MN 和椭圆相切于点 $P(x_0, y_0)$，则切线方程为

$$\frac{x_0x}{(a+1)^2}+\frac{y_0y}{(a-1)^2}=1,$$

易知 M，N 两点坐标分别为

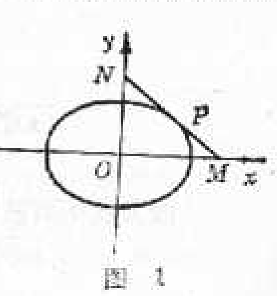


图 1

$$\left(\frac{(a+1)^2}{x_0},\ 0\right),\ \left(0,\ \frac{(a-1)^2}{y_0}\right).$$

$$\because \quad \frac{x_0^2}{(a+1)^2}+\frac{y_0^2}{(a-1)^2}=1,$$

$$\therefore \quad |MN|=\sqrt{\left[\frac{(a+1)^2}{x_0}\right]^2+\left[\frac{(a-1)^2}{y_0}\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left\{\left[\frac{(a+1)^2}{x_0}\right]^2+\left[\frac{(a-1)^2}{y_0}\right]^2\right\}}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{x_0^2}{(a+1)^2}+\frac{y_0^2}{(a-1)^2}}$$

$$\geqslant\sqrt{\left[\frac{(a+1)^2}{x_0}\cdot\frac{x_0}{a+1}+\frac{(a-1)^2}{y_0}\cdot\frac{y_0}{a-1}\right]^2}$$

$$=2a.$$

由题设和不等式取等号的条件得

$$\frac{x_0^2}{(a+1)^3}=\frac{y_0^2}{(a-1)^3},$$

故斜率 $$k=-\frac{(a-1)^2x_0}{(a+1)^2y_0}=-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a+1}.$$

四、解方程(组)或解不等式

和证明不等式的方法一样，利用柯西不等式解方程(组)，也主要是利用柯西不等式取等号的条件，从而求得方程的解。

例1 解方程$2\sqrt{1-2x}+\sqrt{4x+3}=\sqrt{15}$.

解 由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&(2\sqrt{1-2x}+\sqrt{4x+3})^2\\&=\left(2\sqrt{1-2x}+\sqrt{2}\sqrt{2x+\frac{3}{2}}\right)^2\\&\leqslant[2^2+(\sqrt{2})^2]\left[(\sqrt{1-2x})^2+\left(\sqrt{2x+\frac{3}{2}}\right)^2\right]\\&=6\cdot\frac{5}{2}=15,\end{aligned}$$

即
$$2\sqrt{1-2x}+\sqrt{4x+3}\leqslant\sqrt{15}.$$

等号当且仅当$\dfrac{\sqrt{1-2x}}{2}=\dfrac{\sqrt{2x+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$即$x=-\dfrac{1}{3}$时成立。

故原方程的根是$x=-\dfrac{1}{3}$.

一般地，对形如

$$\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}\cdot\sqrt{g_1^2(x)+g_2^2(x)}=f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)$$

的无理方程都可以采用这种方法求解。由柯西不等式知

$$\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}\cdot\sqrt{g_1^2(x)+g_2^2(x)}$$

$$\geqslant f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x),$$

当且仅当 $f_1(x)g_2(x)=f_2(x)g_1(x)$ 时等号成立．那么，方程

$$\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}\cdot\sqrt{g_1^2(x)+g_2^2(x)}$$
$$=f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)$$

就可以转化为方程 $f_1(x)g_2(x)=g_1(x)f_2(x)$ 来求解．

例 2 解方程

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}}=2+\frac{1}{x(x+1)}.$$

解 ∵ $$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}}$$
$$=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+(x+1)^2},$$

而 $$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+(x+1)^2}$$
$$\geqslant\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x},$$

即 $$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+(x+1)^2}$$
$$\geqslant 2+\frac{1}{x(x+1)},$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}}$$
$$\geqslant 2+\frac{1}{x(x+1)}.$$

当上式取等号时有 $x(x+1)=\frac{1}{x(x+1)}$ 成立，即 $x^2+x+1=0$（无实根）或 $x^2+x-1=0$，即 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$．经检验，原方

程的根为 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

形如

$$\left|\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}-\sqrt{g_1^2(x)+g_2^2(x)}\right|$$
$$=\sqrt{[f_1(x)-g_1(x)]^2+[f_2(x)-g_2(x)]^2}$$

的方程也可用同样的方法求解. 由柯西不等式不难证明

$$\left|\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}-\sqrt{g_1^2(x)+g_2^2(x)}\right|$$
$$\leqslant\sqrt{(f_1(x)-g_1(x))^2+(f_2(x)-g_2(x))^2},$$

当且仅当 $f_1(x)g_2(x)=f_2(x)g_1(x)$ 时等号成立. 于是方程

$$\left|\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}-\sqrt{g_1^2(x)+g_2^2(x)}\right|$$
$$=\sqrt{(f_1(x)-g_1(x))^2+(f_2(x)-g_2(x))^2}$$

就可以转化为方程 $f_1(x)g_2(x)=f_2(x)g_1(x)$ 来求解.

例3 解方程

$$\left|\sqrt{4x^2+4x+10}-\sqrt{x^2+4x+20}\right|=\sqrt{x^2-2x+2}.$$

解

$$\because\quad \left|\sqrt{4x^2+4x+10}-\sqrt{x^2+4x+20}\right|$$
$$=\left|\sqrt{(2x+1)^2+3^2}-\sqrt{(x+2)^2+4^2}\right|$$
$$\leqslant\sqrt{(x-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{x^2-2x+2},$$
$$\therefore\quad \left|\sqrt{4x^2+4x+10}-\sqrt{x^2+4x+20}\right|$$
$$\leqslant\sqrt{x^2-2x+2}.$$

当上式等号成立时, 有

$$4(2x+1)=3(x+2),\text{ 即 } x=\frac{2}{5}.$$

经检验, 原方程有唯一解 $x=\frac{2}{5}$.

例4 解方程

$$\left|\sqrt{(x-a)^2+b^2}-\sqrt{(x-c)^2+d^2}\right|$$
$$=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2},$$

其中 $bd>0$, $b\neq d$.

解 $\because$ $\left|\sqrt{(x-a)^2+b^2}-\sqrt{(x-c)^2+d^2}\right|$

$$\leqslant\sqrt{(x-a-x+c)^2+(b-d)^2}$$

$$=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2},$$

$\therefore$ 当上式中等号成立时，有

$$d(x-a)=b(x-c),\quad 即\ x=\frac{bc-ad}{b-d}.$$

经检验，原方程的解为 $x=\dfrac{bc-ad}{b-d}$.

例 5 求三个实数 x, y, z，使得它们同时满足下列方程

$$2x+3y+z=13,$$

$$4x^2+9y^2+z^2-2x+15y+3z=82.$$

（1992 年"友谊杯"国际数学竞赛题）

解 将两个方程相加，得

$$(2x)^2+(3y+3)^2+(z+2)^2=108, \tag{4.1}$$

又第一个方程可变形为

$$2x+(3y+3)+(z+2)=18. \tag{4.2}$$

由(4.1)、(4.2)及柯西不等式，得

$$(2x)^2+(3y+3)^2+(z+2)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{3}[2x+(3y+3)+(z+2)]^2,$$

即
$$108\geqslant\frac{1}{3}\times18^2=108,$$

即柯西不等式中的等号成立，所以

$$2x=3y+3=z+2=6,$$

故 $x=3$, $y=1$, $z=4$.

下面是 1992 年"友谊杯"国际数学竞赛九年级中的一道试题，由读者自己完成：

已知 a, b, c, x, y 和 z 是实数，且 $a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$，求 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ 的值。$\left(答: \dfrac{5}{6}\right)$.

例 6 解方程

$$3(x^2+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})=(x+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x})^2.$$

解 显然 $x=0$ 是方程的根．当 $x>0$ 时，由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}&3(x^2+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\\&\quad=[1^2+1^2+1^2][x^2+(\sqrt[4]{x})^2+(\sqrt[3]{x})^2]\\&\quad\geqslant(x+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x})^2.\end{aligned}$$

等号当且仅当 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1}=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1}$，即 $x=1$ 时成立．

故原方程的根是 $x=0$ 或 $x=1$.

例 7 解三角方程

$$\left[\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]\left[\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]=\frac{3}{4}.$$

解

$$\begin{aligned}\because\quad&\left[\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]\left[\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]\\&\geqslant\left[\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]^2\\&=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

等号当且仅当

$$\sin x\Big/\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\Big/\cos x$$

时成立，即 $\sin 2x=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$，

解得

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\quad(k\in z).$$

故原三角方程的解为$\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\ k\in z\right\}$.

例 8　解三角不等式

$$\left[\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]\left[\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]>\frac{3}{4}.$$

解　由例 7 知

$$\left[\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]\left[\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]\geqslant\frac{3}{4}.$$

当且仅当$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in z)$时，上式等号成立.

故原不等式的解集为

$$\left\{x \mid x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\ k\in z\right\}.$$

例 9　解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=9,\\ x+w=6,\\ x^4+x^2(y^2+z^2+w^2)+w^2(y^2+z^2)=486.\end{cases}$$

解　原方程组可化为

$$\begin{cases}x+y+z=9, & (4.3)\\ x+w=6, & (4.4)\\ (x^2+y^2+z^2)(x^2+w^2)=486. & (4.5)\end{cases}$$

运用柯西不等式得

$$(x^2+y^2+z^2)\geqslant\frac{9^2}{3}=27,\quad x^2+w^2\geqslant\frac{6^2}{2}=18.$$

两式相乘，得

$$(x^2+y^2+z^2)(x^2+w^2)\geqslant 486,$$

当且仅当$x=y=z=w=3$时取等号.

故原方程组的解为$x=y=z=w=3$.

例 10　设a, b是两个实数，$A=\{(x,y)\mid x=n,\ y=na+$

b, $n\in z\}$, $B=\{(x, y)|x=m, y=3m^2+15, m\in z\}$, $C=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内点的集合. 讨论是否存在 a 和 b 使得

(1) $A\cap B\neq\varnothing$($\varnothing$ 表示空集);

(2) $(a, b)\in C$

同时成立. (1985 年全国高考理科数学试题)

分析 $A\cap B\neq\varnothing$ 说明存在整数 n, 使得 $na+b=3n^2+15$, $(a, b)\in C$ 说明 $a^2+b^2\leqslant 144$. 于是原命题等价于命题: 讨论关于 a, b 的混合组 $\begin{cases} na+b=3n^2+15, \\ a^2+b^2\leqslant 144 \end{cases}$ 是否有实数解.

解 假设存在实数 a 和 b 满足

$$\begin{cases} na+b=3n^2+15, \\ a^2+b^2\leqslant 144. \end{cases}$$

由假设及柯西不等式, 有

$$\begin{aligned}(3n^2+15)^2=(na+b)^2&\leqslant(n^2+1^2)(a^2+b^2)\\&\leqslant 144(n^2+1).\end{aligned}$$

由此可得 $(n^2-3)^2\leqslant 0$, $\therefore n^2=3$, $n=\pm\sqrt{3}$. 这与 n 是整数矛盾.

故不存在实数 a, b 使得(1)、(2)同时成立.

例 11 求出所有的实数 a, 使得有非负实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 适合

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=a, & (4.6) \\ x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5=a^2, & (4.7) \\ x_1+2^5x_2+3^5x_3+4^5x_4+5^5x_5=a^3 & (4.8) \end{cases}$$

(1980 年第 21 届 IMO 试题)

解 若已知的三个等式成立, 则由 $(a^2)^2=a\cdot a^3$ 得(4.7)式的平方等于(4.6)式与(4.8)式的乘积.

$$a^4=(x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5)^2$$
$$=[(1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}})(1^{\frac{5}{2}}x_1^{\frac{1}{2}})+(2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{5}{2}}x_2^{\frac{1}{2}})+(3^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}})$$
$$\cdot(3^{\frac{5}{2}}x_3^{\frac{1}{2}})+(4^{\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}})(4^{\frac{5}{2}}x_4^{\frac{1}{2}})+(5^{\frac{1}{2}}x_5^{\frac{1}{2}})(5^{\frac{5}{2}}x_5^{\frac{1}{2}})]^2.$$

取 $a_k=k^{\frac{1}{2}}x_k^{\frac{1}{2}}$，$b_k=k^{\frac{5}{2}}x_k^{\frac{1}{2}}(k=1, 2, 3, 4, 5)$，由柯西不等式得

$$a^4=[(1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}})(1^{\frac{5}{2}}x_1^{\frac{1}{2}})+(2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{5}{2}}x_2^{\frac{1}{2}})+(3^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}})$$
$$\cdot(3^{\frac{5}{2}}x_3^{\frac{1}{2}})+(4^{\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}})(4^{\frac{5}{2}}x_4^{\frac{1}{2}})+(5^{\frac{1}{2}}x_5^{\frac{1}{2}})(5^{\frac{5}{2}}x_5^{\frac{1}{2}})]^2$$
$$\leqslant(x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5)(x_1+2^5x_2+3^5x_3$$
$$+4^5x_4+5^5x_5)=a^4.$$

这个不等式只能成立等号.

(i) 显然当 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$，$a=0$ 时等式成立;

(ii) 若 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 不都为 0，则由柯西不等式取等号的充分必要条件可知

$$\frac{1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}}{1^{\frac{5}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{5}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}}=\frac{4^{\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{5}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}}=\frac{5^{\frac{1}{2}}x_5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{2}}x_5^{\frac{1}{2}}}.$$

然而当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 有两个或两个以上不为 0 时上式不可能成立. 所以 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 只能有一个不为 0.

当 $x_1\neq0$，$x_2=x_3=x_4=x_5=0$ 时，则

$$x_1=a,\ x_1=a^2,\ x_1=a^3.$$

从而解得 $a=1$.

一般地，当 $x_j\neq0$，$x_i=0(i\neq j,\ i,\ j=1, 2, 3, 4, 5)$时，

$$jx_j=a,\ j^3x_j=a^2,\ j^5x_j=a^3,$$

则
$$a=\frac{a^3}{a^2}=j^2\quad(j=1, 2, 3, 4, 5),$$

即所求的 a 的值为 1, 4, 9, 16, 25.

例 12 设 p 是两个大于 2 的相邻整数的乘积，求证：不存在整数 $x_1, x_2, \cdots, x_p$，满足方程

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \frac{4}{4p+1}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 = 1;$$

或求证：仅存在 p 的两个值，对于这两个值有整数 $x_1, x_2, \cdots, x_p$，满足

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \frac{4}{4p-1}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 = 1.$$

（1988 年第 29 届 IMO 候选题）

证明 设 $p=n(n+1)(n\geqslant 3)$，$\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = X$，因为 $4p+1=(2n+1)^2$，所给的方程变成

$$(2n+1)^2\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - 1\right) = 4X^2. \qquad (4.9)$$

因为 $x_i^2 \equiv x_i \pmod 2$，$\sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2 \equiv X \pmod 2$，方程(4.9)推出 $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2$ 是奇数，因而 X 是奇数．如果$(a_1, a_2, \cdots, a_p)$是一组解，$(-a_1, -a_2, \cdots, -a_p)$也是解，所以可设

$$X \geqslant 0. \qquad (4.10)$$

$\because$ x_i 都是整数，$\sum\limits_{i=1}^{p} x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2$，

$$\therefore\ X \leqslant \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = \frac{4}{4p+1} X^2 + 1,$$

即

$$X^2 - \frac{4p+1}{4} X + \frac{4p+1}{4} \geqslant 0. \qquad (4.11)$$

$$\because\ \sqrt{\left(\frac{4p+1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{4p+1}{4}\right)} > \frac{4p+1}{4} - 4,$$

$$\therefore\quad X \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{4p+1}{4}-\sqrt{\left(\frac{4p+1}{4}\right)^2-4\left(\frac{4p+1}{4}\right)}\right]<2,$$

或

$$X \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{4p+1}{4}-\sqrt{\left(\frac{4p+1}{4}\right)^2-4\left(\frac{4p+1}{4}\right)}\right]$$

$$>p-1-\frac{3}{4},$$

即

$$X \leqslant 1 \quad 或 \quad X \geqslant p-1. \tag{4.12}$$

另一方面，由柯西不等式得

$$X^2=\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 \leqslant p\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = p\left(1+\frac{4}{4p+1}X^2\right),$$

即 $$X^2 \leqslant 4p^2+p<\left(2p+\frac{1}{4}\right)^2.$$

$$\therefore\quad -2p \leqslant X \leqslant 2p. \tag{4.13}$$

由(4.10)、(4.12)及(4.13)，并因X是奇数，即得

$$X=1 \quad 或 \quad p-1 \leqslant X \leqslant 2p-1. \tag{4.14}$$

如果 $X=1$，$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1+\frac{4}{4p+1}$ 不是整数，那么 $X\neq 1$；如果$X=p-1$，$\sum_{i=1}^{p} x_i^2=1+\frac{4(p-1)^2}{4p+1}=1+\left(n+\frac{n-2}{2n+1}\right)^2$ 不是整数，那么 $X\neq p-1$. 这样，由于X是奇数，(4.14)式可化为 $p+1 \leqslant X \leqslant 2p-1$.

于是

$$1<\frac{X}{p}<2. \tag{4.15}$$

又因

$$\sum_{i=1}^{p}\left(x_i-\frac{X}{p}\right)^2=\sum_{i=1}^{p} x_i^2-\frac{2X}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i+p\cdot\frac{X^2}{p^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{p} x_i^2-\frac{X^2}{p}=1+\frac{4X^2}{4p+1}-\frac{X^2}{p}$$

$$=1-\frac{X^2}{p(4p+1)}<1,$$

对于每个 $i=1, 2, \cdots, p$ 有 $-1<x_i-\frac{X}{p}<1$. 由(4.15)式 $0<x_i<3$, 因此 $x_i=1$ 或 2. 设 x_i 中等于 2 的数有 m 个，所给方程成为 $4m^2-(4p+3)m+3p+1=0$, 即

$$p=m+\frac{1}{4m-3}. \tag{4.16}$$

因为 $p>2$, 所以方程(4.16)没有整数解.

例 13 考虑多项式

$$p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n,$$

$r_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 $p(x)$ 的全部根, 并且

$$|r_1|^{16}+|r_2|^{16}+\cdots+|r_n|^{16}=n,$$

求这些根. (1989 年第 30 届 IMO 候选题)

解 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为复数, 则有柯西不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^n|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^n|b_i|^2.$$

当且仅当有常数 $k\in C$, 使 $a_i=kb_i(i=1, 2, \cdots, n)$时, 上式等号成立.

由这个不等式, 得

$$n^2=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^2\leqslant n(|r_1|^2+|r_2|^2+\cdots+|r_n|^2), \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}n^4&=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^4\leqslant n^2(|r_1|^2+|r_2|^2+\cdots+|r_n|^2)^2\\&\leqslant n^3(|r_1|^4+|r_2|^4+\cdots+|r_n|^4),\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}n^8&=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^8\leqslant n^6(|r_1|^4+|r_2|^4+\cdots+|r_n|^4)^2\\&\leqslant n^7(|r_1|^8+|r_2|^8+\cdots+|r_n|^8),\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$n^{16}=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^{16}\leqslant n^{14}(|r_1|^8+|r_2|^8+\cdots+|r_n|^8)^2$$

$$\leqslant n^{15}(|r_1|^{16}+|r_2|^{16}+\cdots+|r_n|^{16}). \quad (4.20)$$

但$|r_1|^{16}+|r_2|^{16}+\cdots+|r_n|^{16}=n$，所以在(4.20)中等号成立，从而

$$|r_1|^8+|r_2|^8+\cdots+|r_n|^8=n.$$

再由(4.19)同样可以推得

$$|r_1|^4+|r_2|^4+\cdots+|r_n|^4=n.$$

由(4.18)式得

$$|r_1|^2+|r_2|^2+\cdots+|r_n|^2=n.$$

最后，由(4.17)中等号成立，得$r_1=r_2=\cdots=r_n$，但由韦达定理，得

$$r_1+r_2+\cdots+r_n=-n,$$

$$\therefore \quad r_1=r_2=\cdots=r_n=-1,$$

$$p(x)=(x+1)^n.$$

例14 设a, b, c, d, m, n为正整数，

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1989,\ a+b+c+d=m^2,$$

并且a, b, c, d中最大的为n^2. 确定(并予以证明)m, n的值.　　　　(1989年第30届IMO候选题)

解 由柯西不等式，得

$$a+b+c+d\leqslant 2\sqrt{1989}<90.$$

由于$a^2+b^2+d^2+c^2$为奇数，所以$a+b+c+d$也是奇数，$m^2\in\{1, 9, 25, 49, 81\}$.

由 $$(a+b+c+d)^2>a^2+b^2+c^2+d^2,$$

推出$m^2=49$或81.

不妨设$a\leqslant b\leqslant c\leqslant d=n^2$. 若$m^2=49$，则

$$(49-d)^2=(a+b+c)^2>a^2+b^2+c^2=1989-d^2,$$

从而 $$d^2-49d+206>0,$$

$$d>44 \quad 或 \quad d\leqslant 4.$$

但 $$45^2>1989>d^2 \Rightarrow d<45,$$
$$4d^2 \geqslant a^2+b^2+c^2+d^2=1989 \Rightarrow d>22,$$
$\therefore m^2\neq 49$. 从而 $m^2=81$, $m=9$, 并且
$$d=n^2\in\{25, 36\}.$$

若 $d=n^2=25$, 令 $a=25-p$, $b=25-q$, $c=25-r$, $p、q、r\geqslant 0$, 则由已知条件导出
$$p+q+r=19, \ p^2+q^2+r^2=439.$$
与 $(p+q+r)^2>p+q+r$ 矛盾.

所以 $n^2=36$, $n=6$.

例 15 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是给定的不全为零的实数, $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是实数, 如果不等式
$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i-a_i)\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} \tag{4.21}$$
对任何实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 成立, 求 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的值.

(1988 年全国数学冬令营试题)

解法 1 令 $x_i=a_i(i=1, 2, \cdots, n)$, $b_1^2=\sum\limits_{i=2}^{n}a_i^2$, 则(4.21)式变成
$$\begin{aligned} r_1(x_1-a_1) &\leqslant \sqrt{x_1^2+b_1^2}-\sqrt{a_1^2+b_1^2} \\ &=\frac{x_1^2-a_1^2}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \\ &=\frac{(x_1+a_1)(x_1-a_1)}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

当 $x_1>a_1$ 时, 由(4.22)式得
$$r_1\leqslant\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \tag{4.23}$$
由于(4.23)式对所有大于 a_1 的 x_1 均成立, 所以
$$r_1\leqslant\lim_{x_1\to a_1}\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$$

$$
=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}. \tag{4.24}
$$

当 $x_1<a_1$ 时，由(4.22)得

$$
r_1\geqslant\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}. \tag{4.25}
$$

由于(4.25)式对所有小于 a_1 的 x_1 均成立，所以

$$
\begin{aligned}
r_1&\geqslant\lim_{x_1\to a_1}\frac{x_1+a_2}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\\
&=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}.
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

由(4.24)和(4.26)得

$$
r_1=\frac{a_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}.
$$

类似地我们可以求得 $r_2, r_3, \cdots, r_n$ 的值．这样一来，我们有

$r_i=\dfrac{a_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_i^2=1$．将求得的 r_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的值代入不等式(4.21)左边，利用柯西不等式，得

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}r_i(x_i-a_i)&=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i-\sum_{i=1}^{n}r_ia_i\\
&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}r_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}}\\
&=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}}
\end{aligned}
$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

这就是说，我们求得的 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的值确能使不等式(4.21)对任何实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 成立.

解法2 在(4.21)中令 $x_i=0(i=1, 2, \cdots, n)$，得

$$\sum_{i=1}^{n}r_ia_i\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}.$$

令 $x_i=2a_i(i=1, 2, \cdots, n)$，得

$$\sum_{i=1}^{n}r_ia_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}.$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}r_ia_i=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}. \tag{4.27}$$

又由柯西不等式得

$$\sum_{i=1}^{n}r_ia_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}r_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}. \tag{4.28}$$

由(4.27)和(4.28)得

$$\sum_{i=1}^{n}r_i^2\geqslant 1. \tag{4.29}$$

将(4.27)式代入(4.21)式，得

$$\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

在这个不等式中令 $x_i=r_i(i=1, 2, \cdots, n)$，

$$\sum_{i=1}^{n}r_i^2\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}r_i^2}.$$

不难看出 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_i^2\neq 0$，否则(4.21)式将不成立，

这样一来，

$$\sum_{i=1}^{n}r_i^2\leqslant 1. \tag{4.30}$$

由(4.29)和(4.30)得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 1. \tag{4.31}$$

又 (4.28) 式取等号的充分必要条件是 $r_i = k a_i$，其中 k 为常数，$i=1, 2, \cdots, n$. 将它们代入(4.31)式，我们求得

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

由于根号前取负号使(4.27)式不成立，故

$$k = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

于是，我们求得

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

(以下同解法 1，略。)

五、证明不等式

很多重要的不等式都可以由柯西不等式导出，而且利用柯西不等式很容易将一些简单的不等式加以推广.

例1 已知 a, b, c, d 是不全相等的正数.

求证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}>\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}$.

证明

$$\because\ \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\right)^2,$$

而 a, b, c, d 是不全等的正数，

$\therefore$ 上式不可能成立等号.

$$\therefore\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}>\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}.$$

利用这种证法可以把这个不等式推广为：

如果 $a_i\in R^+(i=1, 2, \cdots, n)$，那么

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}\quad(a_{n+1}=a_1).$$

例2 已知 $a、b、c\in R^+$，求证：

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c.$$

证明 根据柯西不等式，得

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^2\right]$$

$$\cdot[(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2+(\sqrt{a})^2]$$

$$\geqslant\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}+\frac{c}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}\right)^2$$

$$=(a+b+c)^2,$$

即 $$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)(a+b+c)\geqslant(a+b+c)^2.$$

$$\because\quad a、b、c\in R^+,$$

$$\therefore\quad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c.$$

等号成立的充要条件是 $a=b=c$.

例3 求证:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta\geqslant\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha+\sin\beta-1.$$

证明 利用柯西不等式有

$$(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)(1^2+1^2)\geqslant(\sin\alpha+\sin\beta)^2$$

$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\therefore\quad \sin^2\alpha+\sin^2\beta\geqslant2\sin\alpha\sin\beta. \tag{5.1}$$

$$\because\quad (1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)\geqslant0,$$

展开移项得 $$\sin\alpha\sin\beta\geqslant\sin\alpha+\sin\beta-1,$$

代入(5.1)式得

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta\geqslant\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha+\sin\beta-1.$$

等号当且仅当 $\sin\alpha=\sin\beta=1$ 时成立.

例4 若 $a、b、c、d\in R^+$,则

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2\leqslant4(a^6+b^6+c^6+d^6).$$

证明

$$4(a^6+b^6+c^6+d^6)$$

$$=(1^2+1^2+1^2+1^2)[(a^3)^2+(b^3)^2+(c^3)^2+(d^3)^2]$$

$$\geqslant(1\cdot a^3+1\cdot b^3+1\cdot c^3+1\cdot d^3)^2$$

$$=(a^3+b^3+c^3+d^3)^2,$$

即 $\quad (a^3+b^3+c^3+d^3)^2 \leqslant 4(a^6+b^6+c^6+d^6)$.

例 5 求证：$\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} \geqslant \frac{2n}{3n+1}$.

证明

$$\because \quad (n+1)+(n+2)+\cdots+(2n)=\frac{3n^2+n}{2},$$

$$\therefore \quad \frac{3n^2+n}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=[(n+1)+(n+2)+\cdots+2n]$$

$$\times\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\sqrt{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2=n^2,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} \geqslant n^2 \Big/ \frac{3n^2+n}{2}=\frac{2n}{3n+1}.$$

等号当且仅当 $n=1$ 时成立.

例 6 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为两两不相等的正整数，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

（1979 年第 20 届 IMO 试题）

证明

$$\because \quad \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right),$$

而 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互不相同的正整数，

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

故 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big/\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$$
$$\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

即 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_n}{n^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

例 7 设 a_i, $b_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$, 求证:
$$1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\leqslant 1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i}.$$

(《数学教学》1989 年第 4 期问题 192)

证明 原不等式$\Leftrightarrow$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_i}\leqslant 1\Big/\left(1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\right)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)-b_i}{(a_i+b_i)a_i}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\right)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(a_i+b_i)a_i}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\right)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(a_i+b_i)a_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{b_i}\right)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(a_i+b_i)a_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+b_i}{a_ib_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2.$$

由柯西不等式,得
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(a_i+b_i)a_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+b_i}{a_ib_i}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{b_i}{(a_i+b_i)a_i}}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{a_i+b_i}{a_ib_i}}\right)^2$$

$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{b_i}{(a_i+b_i)a_i}}\cdot\sqrt{\frac{a_i+b_i}{a_ib_i}}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2.$$

等号当且仅当

$$\sqrt{\frac{b_i}{(a_i+b_i)a_i}}\Big/\sqrt{\frac{a_i+b_i}{a_ib_i}}=\frac{b_i}{a_i+b_i}=\text{常数},$$

即 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立.

故原不等式成立.

例 8　若 $x, y, z\in R^+$，求证：

$$\sqrt{3}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geqslant(yz+zx+xy)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}.$$

当且仅当 $x=y=z$ 时上式等号成立.

证明　将欲证的不等式两边平方，得

$$3(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)^2$$
$$\geqslant(xy\cdot xz+xy\cdot yz+xz\cdot zy)(yz+zx+xy)^2.$$

令 $u=yz$, $v=zx$, $w=xy$, 则上式变为

$$3(u^2+v^2+w^2)^2\geqslant(vw+wu+uv)(u+v+w)^2. \quad (5.2)$$

由柯西不等式，得

$$(u+v+w)^2\leqslant(1^2+1^2+1^2)(u^2+v^2+w^2),$$

即

$$u^2+v^2+w^2\geqslant\frac{1}{3}(u+v+w)^2. \quad (5.3)$$

式中等号当且仅当 $u=v=w$ 时成立.

又由 $(v-w)^2+(w-u)^2+(u-v)^2\geqslant0$, 得

$$(u+v+w)^2\geqslant3(uv+vw+wu). \quad (5.4)$$

式中等号当且仅当 $u=v=w$ 时成立.

再由(5.3)、(5.4)得

$$3(u^2+v^2+w^2)^2\geqslant\frac{1}{3}(u+v+w)^4$$

$$=\frac{1}{3}(u+v+w)^2(u+v+w)^2$$

$$\geqslant(vw+wu+uw)(u+v+w)^2,$$

从而原不等式成立，式中等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立

例 9　已知 a, b, c, d 是不全相等的正数，

求证：$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}$$

$$>\frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

证明　由柯西不等式

$$\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}\right)$$

$$\cdot[(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)]$$

$$\geqslant(1+1+1+1)^2,$$

$$\therefore\quad\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}\right)$$

$$\cdot 3(a+b+c+d)>16,$$

故 $$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}$$

$$>\frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

我们可以把这个不等式推广为：

若 $a_i\in R^+(i=1, 2, \cdots, n)$，$A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A-a_i}\geqslant\frac{n^2}{(n-1)A}.$$

证明　由柯西不等式得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A-a_i}=\frac{A}{A}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A-a_i}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(A-a_i)}{(n-1)A}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A-a_i}\geqslant\frac{n^2}{(n-1)A}.$$

当且仅当 $A-a_1=A-a_2=\cdots=A-a_n$ 即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立

例 10 设 $x_i>0$, $b_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$, 记

$$S=\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

则
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ix_i}{S-x_i}\geqslant\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{b_i}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ix_i}{S-x_i}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iS-b_i(S-x_i)}{S-x_i}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iS}{S-x_i}-\sum_{i=1}^{n}b_i=S\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{S-x_i}-\sum_{i=1}^{n}b_i\\&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(S-x_i)\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{S-x_i}-\sum_{i=1}^{n}b_i\\&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{S-x_i})^2\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{b_i}{S-x_i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}b_i\\&\geqslant\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{S-x_i}\cdot\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{S-x_i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}b_i\\&=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{b_i}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}b_i.\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{S-x_1}{\sqrt{b_1}}=\frac{S-x_2}{\sqrt{b_2}}=\cdots=\frac{S-x_n}{\sqrt{b_n}}$ 时等号成立。

例 11 设 $a_i(i=1, 2, \cdots, n)\in R^+$, 则

$$\sqrt{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}+\sqrt{a_2^3+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^3}+\cdots$$
$$+\sqrt{a_n^3+a_n^2a_1+a_na_1^2+a_1^3}\geqslant2(\sqrt{a_1^3}+\sqrt{a_2^3}+\cdots+\sqrt{a_n^3}).$$

证明 $\because a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3=(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)$, 由柯西不等式，得

$$[(\sqrt{a_1})^2+(\sqrt{a_2})^2](a_1^2+a_2^2)\geqslant(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2})^2,$$

$$\therefore\quad \sqrt{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}\geqslant a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}$$
$$=\sqrt{a_1^3}+\sqrt{a_2^3}.$$

同理可得 $\sqrt{a_2^3+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^3}\geqslant\sqrt{a_2^3}+\sqrt{a_3^3}$,

$$\cdots\cdots$$

$$\sqrt{a_n^3+a_n^2a_1+a_na_1^2+a_n^3}\geqslant\sqrt{a_n^3}+\sqrt{a_1^3}.$$

将以上各式相加，得

$$\sqrt{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}+\sqrt{a_2^3+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^3}$$
$$+\cdots+\sqrt{a_n^3+a_n^2a_1+a_na_1^2+a_n^3}$$
$$\geqslant 2(\sqrt{a_1^3}+\sqrt{a_2^3}+\cdots+\sqrt{a_n^3}).$$

例 12 设 $x_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n$. 求证：对任何非负整数 k，有

$$\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}\leqslant\frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_n^{k+1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

（1991 年第 32 届 IMO 备选题）

证明 不失一般性，设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 否则，只要用 $x_i'=\dfrac{x_i}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$ 代替 x_i 即可.

当 $k=0$ 时，不等式成立.

设对于非负整数 k 不等式成立，即

$$\sum_{i=1}^n x_i^k/n\leqslant\sum_{i=1}^n x_i^{k+1}.$$

则当 $k+1$ 时，由柯西不等式及归纳假设有

$$\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{k+1}}{n}=\sum_{i=1}^n\left(x_i^{\frac{k+2}{2}}\cdot\frac{x_i^{\frac{k}{2}}}{n}\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^{k+2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n\frac{x_i^k}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^{k+2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{k+1}}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+2},$$

即当 $k+1$ 时，不等式也成立.

从而，对任意非负整数 k 不等式成立.

例 13 设 $k\geqslant 1$，$a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为正实数. 求证:

$$\left(\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots+a_n}\right)^k+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\right)^k \geqslant \frac{n}{(n-1)^k}. \tag{5.5}$$

(1990 年第 31 届 IMO 备选题)

证明 令 $s=a_1+a_2+\cdots+a_n$，当 $k=1$ 时，

$$\frac{a_1}{a_2+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_{n-1}}$$
$$=\frac{s}{s-a_1}+\cdots+\frac{s}{s-a_n}-n,$$

而由柯西不等式，得

$$\left(\frac{s}{s-a_1}+\cdots+\frac{s}{s-a_n}\right)\left(\frac{s-a_1}{s}+\cdots+\frac{s-a_n}{s}\right)\geqslant n^2,$$

即
$$\frac{s}{s-a_1}+\cdots+\frac{s}{s-a_n}\geqslant\frac{n^2}{n-1}.$$

于是
$$\frac{a_1}{a_2+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_{n-1}}$$
$$\geqslant\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}.$$

当 $k>1$ 时，令 $x_i=\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)^k$，$i=1, 2, \cdots, n$，

则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{k}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1}. \tag{5.6}$$

又由幂平均不等式(因为 $k>1$),

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{k}}}{n}\right)^k \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}. \tag{5.7}$$

由(5.6),(5.7)推出

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqslant \frac{1}{n^{k-1}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{k}}\right)^k$$

$$\geqslant\left(\frac{n}{n-1}\right)^k\cdot\frac{1}{n^{k-1}}=\frac{n}{(n-1)^k},$$

即(5.5)成立.

在 $k<1$ 时,(5.5)不成立. 例如令

$$a_1=a_2=1,\ a_3=\cdots=a_n=n^{-\frac{1}{k}},$$

则 (5.5)的左边$<1+1+(n-2)\cdot n^{-1}<3$,

而右边 $\to+\infty(n\to+\infty)$.

例 14 已知 a_1, a_2 是实数, z_1, z_2 是复数, 求证:

$2|a_1z_1+a_2z_2|\leqslant(a_1^2+a_2^2)(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|)$.

(1989 年《中学生数理化》数理化接力赛试题)

分析 作代换 $a_1^2+a_2^2=R^2$, 并设

$$a_1=R\cos\theta,\ a_2=R\sin\theta,$$

则待证不等式变为

$$2|\cos\theta\cdot z_1+\sin\theta\cdot z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|.$$

又 $2|\cos\theta\cdot z_1+\sin\theta\cdot z_2|^2$

$$=2(\cos\theta\cdot z_1+\sin\theta\cdot z_2)(\cos\theta\cdot\bar{z}_1+\sin\theta\cdot\bar{z}_2)$$

$$=2|z_1|^2\cos^2\theta+2|z_2|^2\sin^2\theta+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)\sin2\theta,$$

所以上述不等式变为

$$|z_1|^2(2\cos^2\theta-1)+|z_2|^2(2\sin^2\theta-1)$$

$$+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)\sin2\theta\leqslant|z_1^2+z_2^2|.$$

即要证明:

$$(|z_1|^2-|z_2|^2)\cos 2\theta+(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_1)\sin 2\theta\leqslant|z_1^2+z_2^2|.$$

由柯西不等式得

$$(\because\quad z_1\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1\in R)$$

$$\text{左边}\leqslant\sqrt{(|z_1|^2-|z_2|^2)^2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)^2}$$

$$=\sqrt{|z_1|^4+|z_2|^4+z_1^2\bar{z}_2^2+z_2^2\cdot\bar{z}_1^2}$$

$$=\sqrt{z_1^2\cdot\bar{z}_1^2+z_2^2\cdot\bar{z}_2^2+z_1^2\cdot\bar{z}_2^2+z_2^2\cdot\bar{z}_1^2}$$

$$=\sqrt{(z_1^2+z_2^2)(\bar{z}_1^2+\bar{z}_2^2)}=\sqrt{|z_1^2+z_2^2|^2}=|z_1^2+z_2^2|.$$

例 15 设 $a, b, c\geqslant 0$，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

证明 根据柯西不等式，得

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}\geqslant ab+bc,$$

$$\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{c^2+a^2}\geqslant bc+ca,$$

$$\sqrt{c^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant ca+ab,$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2(ab+bc+ca),$$

于是

$$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2\geqslant 2(a+b+c)^2,$$

即

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

下面对这个不等式进行一些推广.

先证明几个引理：

引理 1 设 $a, b\in R^+$，$m, n\in N$，则

$$(a^m+b^m)(a^n+b^n)\leqslant 2(a^{m+n}+b^{m+n}).$$

证明 $\because\quad (a^m-b^m)(a^n-b^n)\geqslant 0,$

$$\therefore\quad a^{m+n}+b^{m+n}-a^mb^n-a^nb^m\geqslant 0,$$

$$2(a^{m+n}+b^{m+n})\geqslant a^{m+n}+b^{m+n}+a^mb^n+a^nb^m=(a^m+b^m)(a^n+b^n).$$

引理2 设 $a, b\geqslant 0$, $n\in N$, 则

$$(a+b)^n\leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n).$$

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 不等式显然成立;

假设 $n=k$ 时不等式成立, 即

$$(a+b)^k\leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k),$$

当 $n=k+1$ 时,

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)\leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$$
$$\leqslant 2^k(a^{k+1}+b^{k+1}).$$

故对任意自然数 n, 不等式成立.

推广1 设 $a, b, c\in R^+$, $n\in N$, 则

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}\geqslant\sqrt[n]{2}(a+b+c).$$

证明 由引理2, 有

$$a^n+b^n\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}(a+b)^n,$$

$$b^n+c^n\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}(b+c)^n,$$

$$c^n+a^n\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}(c+a)^n.$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{a^n+b^n}\geqslant\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b),$$

$$\sqrt[n]{b^n+c^n}\geqslant\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(b+c),$$

$$\sqrt[n]{c^n+a^n}\geqslant\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(c+a).$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}$$
$$\geqslant\sqrt[n]{2}(a+b+c).$$

推广2 设 $a_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)-a_i^2}\geqslant\sqrt{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

证明 由柯西不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)-a_i^2}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\left[\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)-a_i\right]^2}{n-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)-a_i\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$=\sqrt{n-1}\,(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

引理 3 设 $a_i\geqslant0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$n\in N$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^n\leqslant m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^n\right).$$

证明 由权方和不等式：若 $a_i\geqslant0$，$b_i\geqslant0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$m$ 为自然数，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{b_i^{m-1}}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^m}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{m-1}}.$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^n=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^n}{1^{n-1}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^n\Big/\left(\sum_{i=1}^{m}1\right)^{n-1}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^n\Big/m^{n-1},$$

$$\therefore\quad\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^n\leqslant m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^n\right).$$

推广 3 设 $a_i\geqslant0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$n\in N$，则

$$\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{\left(\sum_{j=1}^{m}a_j^n\right)-a_i^n}\geqslant\sqrt[n]{m-1}\,(a_1+a_2+\cdots+a_m).$$

证明　由引理3，

$$\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{\left(\sum_{j=1}^{m}a_j^n\right)-a_i^n}\geqslant\sum_{i=1}^{m}\sqrt[n]{\frac{\left[\left(\sum_{j=1}^{m}a_j\right)-a_i\right]^n}{(m-1)^{n-1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{(m-1)^{n-1}}}\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sum_{j=1}^{m}a_j\right)-a_i\right]$$

$$=\frac{\sqrt[n]{m-1}}{m-1}\cdot(m-1)\sum_{i=1}^{m}a_i$$

$$=\sqrt[n]{m-1}\,(a_1+a_2+\cdots+a_m).$$

例16　已知$a, b, c\in R^+$，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

（1963年第26届莫斯科数学奥林匹克试题）

证明

$$\because\quad[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant(1+1+1)^2=9,$$

$$\therefore\quad(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant\frac{9}{2},$$

即

$$\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\geqslant\frac{9}{2},$$

故

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

这个不等式可以推广为：

设$x_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，记$s=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则

$$\frac{x_1}{s-x_1}+\frac{x_2}{s-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{s-x_n}\geqslant\frac{n}{n-1}. \qquad (5.8)$$

当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时等号成立。

证明　根据柯西不等式，

$$\frac{x_1}{s-x_1}+\frac{x_2}{s-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{s-x_n}$$

$$=\frac{s-(s-x_1)}{s-x_1}+\frac{s-(s-x_2)}{s-x_2}+\cdots+\frac{s-(s-x_n)}{s-x_n}$$

$$=s\left(\frac{1}{s-x_1}+\frac{1}{s-x_2}+\cdots+\frac{1}{s-x_n}-n\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}[(s-x_1)+(s-x_2)+\cdots+(s-x_n)]$$

$$\cdot\left(\frac{1}{s-x_1}+\frac{1}{s-x_2}+\cdots+\frac{1}{s-x_n}\right)-n$$

$$\geqslant\frac{1}{n-1}\cdot n^2-n=\frac{n}{n-1}.$$

当且仅当 $s-x_1=s-x_2=\cdots=s-x_n$ 即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

例 17　设 $a, b, c>0$，则

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}\geqslant 3(\sqrt{5}-1).$$

当且仅当 $a:b:c=(\sqrt{5}+1):(\sqrt{5}-1):(3-\sqrt{5})$ 时等号成立.

证明　令 $s=a+b+c$，由柯西不等式得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$$

$$=\frac{s-(b+c)}{b+c}+\frac{4s-4(c+a)}{c+a}+\frac{5s-5(a+b)}{a+b}$$

$$=s\left(\frac{1}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)-10$$

$$=\frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]$$

$$\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)-10$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(1+2+\sqrt{5})^2-10=3(\sqrt{5}-1).$$

当且仅当 $b+c=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$，即

$$\frac{a}{\sqrt{5}+1}=\frac{b}{\sqrt{5}-1}=\frac{c}{3-\sqrt{5}}$$

时等号成立.

例 18 设 $a, b, c>0$，则

$$\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{8c+4a}+\frac{9c}{3a+2b}\geqslant\frac{47}{48}.$$

当且仅当 $a:b:c=10:21:1$ 时等号成立.

证明 令 $A=\frac{3a}{2}, B=b, C=3c, s=a+b+c$，由柯西不等式，得

$$\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{8c+4a}+\frac{9c}{3a+2b}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}a}{b+3c}+\frac{\frac{3}{8}b}{3c+\frac{3}{2}a}+\frac{\frac{3}{2}\cdot 3c}{\frac{3}{2}a+b}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{A}{B+C}+\frac{3}{8}\cdot\frac{B}{C+A}+\frac{3}{2}\cdot\frac{C}{A+B}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{s-(B+C)}{B+C}+\frac{3}{8}\cdot\frac{s-(C+A)}{C+A}+\frac{3}{2}\cdot\frac{s-(A+B)}{A+B}$$

$$=\frac{1}{2}[(B+C)+(C+A)+(A+B)]$$

$$\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{B+C}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{C+A}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{A+B}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\right)$$

$$\geqslant\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{8}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-\frac{61}{24}=\frac{47}{48}.$$

当且仅当

$$(B+C)\Big/\sqrt{\frac{2}{3}}=(C+A)\Big/\sqrt{\frac{3}{8}}=(A+B)\Big/\sqrt{\frac{3}{2}},$$

即 $a:b:c=10:21:1$ 时，等号成立。

事实上，例 17、例 18 也可以看作是例 16 在某种意义上的一种推广。

一般地，若记 $s=x_1+x_2+\cdots+x_n$,

$$s_{k_1}=x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

$$s_{k_2}=x_2+x_3+\cdots+x_{k+1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$s_{k_n}=x_n+x_1+\cdots+x_{k-1}\quad(1\leqslant k<n).$$

那么有

$$\frac{s_{k_1}}{s-s_{k_1}}+\frac{s_{k_2}}{s-s_{k_2}}+\cdots+\frac{s_{k_n}}{s-s_{k_n}}\geqslant\frac{nk}{n-k}. \tag{5.9}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时上式等号成立。

证明　根据柯西不等式，

$$\begin{aligned}
&\frac{s_{k_1}}{s-s_{k_1}}+\frac{s_{k_2}}{s-s_{k_2}}+\cdots+\frac{s_{k_n}}{s-s_{k_n}}\\
&=\frac{s-(s-s_{k_1})}{s-s_{k_1}}+\frac{s-(s-s_{k_2})}{s-s_{k_2}}+\cdots+\frac{s-(s-s_{k_n})}{s-s_{k_n}}\\
&=s\left(\frac{1}{s-s_{k_1}}+\frac{1}{s-s_{k_2}}+\cdots+\frac{1}{s-s_{k_n}}\right)-n\\
&=\frac{1}{n-k}\left[(s-s_{k_1})+(s-s_{k_2})+\cdots+(s-s_{k_n})\right]\\
&\quad\cdot\left(\frac{1}{s-s_{k_1}}+\frac{1}{s-s_{k_2}}+\cdots+\frac{1}{s-s_{k_n}}\right)-n\\
&\geqslant\frac{1}{n-k}\cdot n^2-n=\frac{nk}{n-k}.
\end{aligned}$$

当且仅当 $s-s_{k_1}=s-s_{k_2}=\cdots=s-s_{k_n}$，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立。

当 $k=1$ 时，不等式(5.9)即为不等式(5.8)。

如果 n 为偶数，例如，$n=4$，若取 $k=2$，那么(5.9)式变为

$$\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_2+x_3}{x_4+x_1}+\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2}+\frac{x_4+x_1}{x_2+x_3}\geqslant 4.$$

有趣的是，若取 $k=n-1$，则有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{x_1}+\cdots$$
$$+\frac{x_n+x_1+\cdots+x_{n-2}}{x_{n-1}}\geqslant n(n-1).$$

这正是由(5.8)式左端各项的倒数和构成的不等式.

像例 16 中的不等式、(5.8)、(5.9)这样的不等式我们常称之为循环不等式. 下面介绍一下例 16 中的循环不等式的一些情况.

1954 年，美国数学家 H. S. Shapiro 提出了一个猜想：当 $n\geqslant 3$ 时，有循环不等式

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}\geqslant\frac{n}{2}. \qquad (5.10)$$

这一猜想提出后，世界各国有许多专家、学者进行了不懈的研究.

1958 年英国剑桥大学教授莫尔提洛首先提出了不等式(5.10)对 $n\leqslant 6$ 时成立，并猜测 $n=7$ 时，(5.10)式不成立. 有趣的是，若能找到 $x_1, x_2, \cdots, x_7$ 使得(5.10)式不成立，那么对一切 $n\geqslant 7$，(5.10)式不成立. 但是，1961 年贝尔格莱德的数学家德耶科维奇推翻了莫尔提洛的猜测，并证明了 $n=8$ 时(5.10)式成立(证法也适用于 $n=7$ 的情形). 1967 年巴西数学家诺沃萨德给出了 $n=10$ 时(5.10)式成立的证明. 1974 年苏联数学家 B. И. 列维与 E. K. 可杜诺娃证明了 $n=12$ 时(5.10)式也是成立的.

早在 1956 年英国数学家赖特希尔认为，一般地说，

(5.10)式是不成立的．他还构造出一组由 20 个数组成的数组，使得 $f_{20}(x_1, x_2, \cdots, x_{20})<10$．1958 年苏联的数学家楚劳弗举出了 $n=14$ 时的反例，这些数是 50, 5, 48, 3, 48, 1, 50, 0, 52, 1, 54, 4, 53, 6．同年，格拉斯哥的数学家拉金证明了对充分大的奇数 n，(5.10)式不成立．1959 年楚劳弗再次证明了对奇数 $n\geqslant53$，(5.10)式不成立．1961 年新加坡的学者贾尚大给出了 $n=27$ 时的反例．1971 年英国的学者捷金吕举出了 $n=25$ 时的反例．而列宁格勒大学数学寄宿学校的两位中学生 P. 阿列克赛也夫和 E. 崔斯京用 IBM 计算机独立地作出了 $n=25$ 时的反例，这些数是：32, 0, 37, 0, 43, 0, 50, 0, 59, 8, 62, 21, 55, 29, 44, 32, 33, 31, 24, 30, 16, 29, 10, 29, 4．

经过几十年的研究，目前只是证明了当 $n\leqslant12$ 时，(5.10)式成立，而 n 为不小于 25 的奇数以及 n 为不小于 14 的偶数时，上式不成立．但在 1985 年，美国数学家 B. A. Troesch 证明 $n=13$ 时，(5.10)式也成立．在 1989 年 10 月 B. A. Troesch 又证明了余下的几个 n，即 $n=15, 17, 19, 21, 23$ 时，(5.10)式成立．对此，他给出了 $n=23$ 时的证明．至此，困惑数学界近 40 年的循环不等式的判定问题已经解决．但仍不能认为这个问题已经圆满解决，这是由于问题的初等形式，期望一个初等代数解法应是十分自然的．但除了 $n\leqslant8$ 外，至今所见到的(5.10)式的证明($n\geqslant9$)都是非代数的，或是间接的．因此，去寻找 $n=7, 9, 10, 11$ 等的代数证法，似乎更有意义一些．下面是几个典型问题的初等证法．

$n=14$ 时，(5.10)式不成立．

若取 $\varepsilon=0.00001$，$x_1=1+7\varepsilon$，$x_2=7\varepsilon$，$x_3=1+4\varepsilon$，$x_4=6\varepsilon$，$x_5=1+5\varepsilon$，$x_6=\varepsilon$，$x_7=1+2\varepsilon$，$x_8=\varepsilon$，$x_9=1$，$x_{10}=\varepsilon$，$x_{11}=$

$1+s$, $x_{12}=4s$, $x_{13}=1+4s$, $x_{14}=6s$, 则

$$f_{14}(x_1, x_2, \cdots, x_{14})\leqslant 6.999983<\frac{14}{2}.$$

这说明当 $n=14$ 时, (5.10)式不成立.

下面证明当 n 为偶数且 $n\geqslant 14$ 时(5.10)式不成立. 用数学归纳法予以证明.

由上可知, 当 $n=14$ 时, (5.10)式不成立. 假设对某个 $m\geqslant 7$, 当 $n=2m$ 时 (5.10) 式不成立, 即存在 $x_1, x_2, \cdots, x_{2m-1}, x_{2m}$, 使 $f_{2m}(x_1, x_2, \cdots, x_{2m})<m$. 取 $x_{2m+1}=x_{2m-1}$, $x_{2m+2}=x_{2m}$, 则

$$\begin{aligned}
&f_{2m+2}(x_1, x_2, \cdots, x_{2m+2})\\
&=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{2m-1}}{x_{2m}+x_{2m+1}}\\
&\quad+\frac{x_{2m}}{x_{2m+1}+x_{2m+2}}+\frac{x_{2m+1}}{x_{2m+2}+x_1}+\frac{x_{2m+2}}{x_1+x_2}\\
&=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{2m-1}}{x_{2m}+x_{2m+1}}\\
&\quad+\frac{x_{2m}}{x_{2m+1}+x_{2m+2}}+\frac{x_{2m-1}}{x_{2m}+x_1}+\frac{x_{2m}}{x_1+x_2}\\
&=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{2m-1}}{x_{2m}+x_1}+\frac{x_{2m}}{x_1+x_2}+1\\
&=f_{2m}(x_1, x_2, \cdots, x_{2m})+1<m+1.
\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $n=2(m+1)$ 时, (5.10)式是不成立的.

事实上, (5.10)式关于 $n=4$, 5, 6 时的情形, 福建杨学枝老师用柯西不等式给出了较为简捷的证明.

当 $n=4$ 时, 由柯西不等式得

$$[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_1)+x_4(x_1+x_2)]\\
\cdot\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_1}+\frac{x_4}{x_1+x_2}\right)$$

$$\geqslant (x_1+x_2+x_3+x_4)^2. \tag{5.11}$$

另一方面，由于

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)$$
$$+x_3(x_4+x_1)+x_4(x_1+x_2)]$$
$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_3-2x_2x_4$$
$$=(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\geqslant 0,$$

所以

$$x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_1)+x_4(x_1+x_2)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2. \tag{5.12}$$

(5.11)除以(5.12)得

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_1}+\frac{x_4}{x_1+x_2}\geqslant 2.$$

由上面的证明过程可知，当且仅当 $x_1=x_3$, $x_2=x_4$ 时，上式中等号成立.

当 $n=5$ 时，由柯西不等式，得

$$[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)$$
$$+x_4(x_5+x_1)+x_5(x_1+x_2)]$$
$$\cdot\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_1}+\frac{x_5}{x_1+x_2}\right)$$
$$\geqslant (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2. \tag{5.13}$$

另一方面，由于

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-5[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)$$
$$+x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_1)+x_5(x_1+x_2)]$$
$$=2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2$$
$$-\frac{1}{2}\cdot 5[(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2$$
$$-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[5(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2) - (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2] \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_1) + x_5(x_1+x_2) \leqslant \frac{2}{5}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2. \quad (5.14)$$

(5.13)除以(5.14)即得

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_1}+\frac{x_5}{x_1+x_2} \geqslant \frac{5}{2}.$$

由以上证明过程知，当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$ 时，上式中等号成立.

当 $n=6$ 时，由柯西不等式，有

$$[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_6) + x_5(x_6+x_1)+x_6(x_1+x_2)] \cdot\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_6} + \frac{x_5}{x_6+x_1}+\frac{x_6}{x_1+x_2}\right) \geqslant (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2. \quad (5.15)$$

另外，由于

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2-3[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4) + x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_6)+x_5(x_6+x_1)+x_6(x_1+x_2)]$$
$$=(x_1+x_4)^2+(x_2+x_5)^2+(x_3+x_6)^2 - (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5 + x_4x_6+x_5x_6+x_5x_1+x_6x_1+x_6x_2)$$
$$=\frac{1}{2}[(x_1+x_4-x_2-x_5)^2+(x_2+x_5-x_3-x_6)^2 + (x_3+x_6-x_1-x_4)^2] \geqslant 0,$$

即

$$
\begin{aligned}
&3[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)\\
&\quad+x_4(x_5+x_6)+x_5(x_6+x_1)+x_6(x_1+x_2)]\\
&\quad\leqslant(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2. \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

(5.15)除以(5.16)，得

$$
\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_6}+\frac{x_5}{x_6+x_1}+\frac{x_6}{x_1+x_2}
\geqslant 3.
$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6$ 时，上式中等号成立。

值得注意的是，若用类似的方法证明 $n=7$ 时的循环不等式，是达不到目的的，读者可以举反例予以说明。

对不等式(5.10)，在原题设条件下，再增加某些条件，那么不等式(5.10)对所有 $n\in N$ 成立。

当 $0<x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_1$ 时，有

$$
f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geqslant\frac{n}{2}.
$$

证明 先证

$$
f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geqslant f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})+\frac{1}{2}.
$$

事实上，有如下恒等式

$$
\begin{aligned}
&f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)-f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\\
&=\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-3}}{x_{n-2}+x_{n-1}}+\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_n}\right.\\
&\quad\left.+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\right)-\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots\right.\\
&\quad\left.+\frac{x_{n-3}}{x_{n-2}+x_{n-1}}+\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_1}+\frac{x_{n-1}}{x_1+x_2}\right)\\
&=\frac{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_1-x_n)}{(x_{n-1}+x_n)(x_1+x_{n-1})}+\frac{(x_1-x_n)(x_{n-1}-x_n)(x_1-x_{n-1})}{2(x_{n-1}+x_n)(x_1+x_n)(x_1+x_{n-1})}\\
&\quad+\frac{(x_{n-1}-x_n)(x_2-x_n)}{(x_1+x_2)(x_1+x_n)}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

由数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的单调性知，上述各项均非负，于是

$$\begin{aligned}
f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &\geqslant f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})+\frac{1}{2} \\
&\geqslant f_{n-2}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}) \\
&\geqslant \cdots \geqslant f_2(x_1, x_2)+\frac{n-2}{2} \\
&=\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{n-2}{2}=\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

当 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 时，有

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geqslant\frac{n}{2}.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}
&f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&=\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}+x_n}{x_n+x_1}+\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2} \\
&\quad-\frac{x_2+x_3}{x_2+x_3}-\frac{x_3+x_4}{x_3+x_4}-\cdots-\frac{x_n+x_1}{x_n+x_1}-\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2} \\
&\quad+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_4}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_1}{x_n+x_1}+\frac{x_2}{x_1+x_2},
\end{aligned}$$

$$\because\quad \frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}\cdot\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}\cdots\frac{x_{n-1}+x_n}{x_n+x_1}\cdot\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}+x_n}{x_n+x_1}+\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}\geqslant n.$$

所以，只须证明

$$\begin{aligned}
&g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\quad=\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_1} \\
&\quad\geqslant\frac{n}{2},
\end{aligned}$$

即只须证明

$$g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)-g_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

事实上，

$$g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)-g_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_{n-1}}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_1}\right)-\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_{n-1}+x_1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_{n-1})(x_n-x_1)}{2(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)(x_{n-1}+x_1)} \geqslant 0.$$

由数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的单调性知，最后一式的分子中各因数均非负，于是

$$\begin{aligned} g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) & \geqslant g_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})+\frac{1}{2} \\ & \geqslant g_{n-2}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2})+1 \\ & \geqslant \cdots \geqslant g_2(x_1, x_2)+\frac{n-2}{2} \\ & =\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_1}{x_2+x_1}+\frac{n-2}{2}=\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

对于任意 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)+f_n(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1) \geqslant n.$$

证明 注意到

$$f_n(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1)$$

$$=\frac{x_n}{x_{n-1}+x_{n-2}}+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_{n-3}}+\cdots+\frac{x_3}{x_2+x_1}+\frac{x_2}{x_1+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_{n-1}},$$

$$\therefore\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)+f_n(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1)$$

$$=\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_5}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}+x_2}{x_{n-2}+x_{n-1}}+\frac{x_n+x_3}{x_1+x_2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}$$

(其中 $x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2,\ x_{n+3}=x_3.$)

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i+x_{i+1})-(x_{i+1}+x_{i+2})+(x_{i+2}+x_{i+3})}{x_{i+1}+x_{i+2}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}-n$$

$$\geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)^{\frac{1}{n}}+n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)^{\frac{1}{n}}-n$$

$$=2n-n=n.$$

若对某个 n 有常数 C，使对于任意 $2n$ 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ 有 $f_{2n}(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})\geqslant C$，则对于任意 $2n-1$ 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}$，有

$$f_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})\geqslant C-\frac{1}{2}.$$

证明 任取 $2n-1$ 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}$，首先我们指出在 $(x_1-x_{2n-1})(x_2-x_1)$，$(x_2-x_1)(x_3-x_2)$，$\cdots$，$(x_{2n-2}-x_{2n-3})(x_{2n-1}-x_{2n-2})$，$(x_{2n-1}-x_{2n-2})(x_1-x_{2n-1})$ 这 $2n-1$ 个乘积中至少有一个不小于 0. 因若不然，上面 $2n-1$ 个乘积都小于 0，则

$$\frac{x_1-x_{2n-1}}{x_1-x_{2n-1}},\ \frac{x_2-x_1}{x_3-x_2},\ \cdots,\ \frac{x_{2n-2}-x_{2n-3}}{x_{2n-1}-x_{2n-2}},\ \frac{x_{2n-1}-x_{2n-2}}{x_1-x_{2n-1}}$$

都小于 0. 因此，这 $2n-1$ 个小于 0 的数的乘积小于 0，但是直接计算可知它们的乘积等于 1，从而产生矛盾.

根据循环性质，不妨假定 $(x_1-x_{2n-1})(x_2-x_1)\geqslant 0$，由原假设 $f_{2n}(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})\geqslant C$，所以

$$f_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})-C+\frac{1}{2}$$

$$\geqslant f_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})$$

$$-f_{2n}(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{2n-2}}{x_{2n-1}+x_1}+\frac{x_{2n-1}}{x_1+x_2}$$

$$-\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{2n-2}}{x_{2n-1}+x_1}+\frac{x_{2n-1}}{2x_1}\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x_{2n-1}}{x_1+x_2}-\frac{x_1}{x_1+x_2}-\frac{x_{2n-1}}{2x_1}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x_1-x_{2n-1}}{2x_1}+\frac{x_{2n-1}-x_1}{x_1+x_2}=\frac{(x_1-x_{2n-1})(x_2-x_1)}{2x_1(x_1+x_2)}$$

$$\geqslant 0.$$

由此推出 $\quad f_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})\geqslant C-\frac{1}{2}.$

六、证明条件不等式

由于柯西不等式中有三个因式 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$, 因此它在解决一些条件不等式中有很重要的作用.

例1 若 $a^2+b^2+c^2=1$, 求证: $-\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1$.

证明 由柯西不等式, 得

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2&=(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)\\&\geqslant(ab+bc+ca)^2,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2=1.$$

由于 $(a+b+c)^2\geqslant 0$, 即得

$$2(ab+bc+ca)\geqslant-(a^2+b^2+c^2)=-1.$$

这道例题, 利用柯西不等式可以推广为:

若 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=k\ (k>0)$, 则

$$-\frac{k}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}\leqslant k\quad(\text{记 } x_{n+1}=x_1).$$

例2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n>1)$ 是实数, 且

$$A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2,$$

求证: $\quad A<2a_ia_j\ (1\leqslant i<j\leqslant n)$.

证明 由已知得

$$A<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$

因此只要证

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant 2a_i a_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n) \qquad (6.1)$$

即可．事实上，由柯西不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = [(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_n]^2$$

$$\leqslant (n-1)[(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2]$$

$$=(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2a_1a_2\right],$$

故 $$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant 2a_1a_2.$$

同理对于 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，(6.1)式获证．

例3 已知：$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1$．

求证：$|\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C| \leqslant 2\sqrt{2}$．

分析 ∵ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1 \Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=2$．又

$$|\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C|$$

$$=2|\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C|,$$

对照柯西不等式，可得到如下的证明．

证明 ∵ $(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)^2$

$$\leqslant (\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\cdot(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C),$$

即 $$\left[\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\right]^2 \leqslant 2,$$

$$\therefore \quad |\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C| \leqslant 2\sqrt{2}.$$

例4 若 a，b，c，k 均为常数，α，β，γ 满足关系式

$$a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta+c\operatorname{tg}\gamma=k,$$

求证：$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma \geqslant \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

分析 将上式变形为

$$(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma)(a^2+b^2+c^2)\geqslant k^2,$$

再用柯西不等式证即可.

证明 $\because$ $(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma)(a^2+b^2+c^2)$

$$\geqslant(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta+c\operatorname{tg}\gamma)^2=k^2,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant\frac{k^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

当且仅当 p 为常数, $a=p\operatorname{tg}\alpha$, $b=p\operatorname{tg}\beta$, $c=p\operatorname{tg}\gamma$ 时取等号, 即 $a\operatorname{tg}\beta=b\operatorname{tg}\alpha$, $a\operatorname{tg}\gamma=c\operatorname{tg}\alpha$, $b\operatorname{tg}\gamma=c\operatorname{tg}\beta$ 时取等号.

例5 若 $a_1>a_2>\cdots>a_n>a_{n+1}$, 又 b_1, b_2, $\cdots$, b_n 是任意实数, 则

$$\frac{b_1^2}{a_1-a_2}+\frac{b_2^2}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_n-a_{n+1}}$$

$$\geqslant\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}{a_1-a_{n+1}}. \tag{6.2}$$

等号成立的充要条件是

$$\frac{b_1}{a_1-a_2}=\frac{b_2}{a_2-a_3}=\cdots=\frac{b_n}{a_n-a_{n+1}}.$$

证明 由柯西不等式, 得

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2=\left[\sum_{i=1}^n\frac{b_i}{\sqrt{a_i-a_{i+1}}}\cdot\sqrt{a_i-a_{i+1}}\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{b_i^2}{a_i-a_{i+1}}\cdot\sum_{i=1}^n(a_i-a_{i+1})$$

$$=(a_1-a_{n+1})\sum_{i=1}^n\frac{b_i^2}{a_i-a_{i+1}}.$$

两边除以 a_1-a_{n+1} 即得不等式(6.2).

例6 已知 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 都是正数, 且其和为1, 求证:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

(第24届全苏数学奥林匹克试题)

证明 由柯西不等式, 知

$$2\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right)$$

$$=[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1)]$$

$$\cdot\left[\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right]$$

$$\geqslant\left[\sqrt{a_1+a_2}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2}}+\sqrt{a_2+a_3}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\sqrt{a_{n-1}+a_n}\cdot\frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}+a_n}}+\sqrt{a_n+a_1}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1}}\right]^2$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=1.$$

例7　已知二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的所有系数都是正数，且 $a+b+c=1$. 求证：对于任何正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，只要 $x_1x_2\cdots x_n=1$，就有 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geqslant 1$.

（第24届全苏数学奥林匹克试题）

证明　固定变量 $x_3, x_4, \cdots, x_n$，此时 x_1, x_2 在 $x_1x_2=1$ 常量的条件上变动，由柯西不等式得

$$f(x_1)f(x_2)=(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)$$

$$\geqslant[a(\sqrt{x_1x_2})^2+b\sqrt{x_1x_2}+c]^2$$

$$=f^2(\sqrt{x_1x_2})\text{（常数）}.$$

等号当且仅当

$$\frac{\sqrt{a}x_1}{\sqrt{a}x_2}=\frac{\sqrt{bx_1}}{\sqrt{bx_2}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}=1,$$

即 $x_1=x_2$ 时成立. 由对称性知：当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ 有最小值 $f^n(1)=(a+b+c)^n=1$，故 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geqslant 1$.

例8　已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正实数，满足

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n b_k,$$

求证：$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

证明 由柯西不等式，得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2. \qquad (6.3)$$

根据已知条件，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=2\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

在(6.3)式的两边约去 $2\sum_{k=1}^{n}a_k$ 即得结论。

例9 n 为正整数，a，b 为给定实数，x_0，x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为实数，已知

$$\sum_{i=0}^{n}x_i=a,\quad\sum_{i=0}^{n}x_i^2=b,$$

确定 x_0 的变化范围。

（1989年第30届IMO备选题）

解 由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right),$$

因此 $$(a-x_0)^2\leqslant n(b-x_0^2),$$

即 $$(n+1)x_0^2-2ax_0+a^2-nb\leqslant 0.$$

这个二次三项式的判别式

$$D=4n(n+1)\left(b-\frac{a^2}{n+1}\right).$$

（i）若 $b<\frac{a^2}{n+1}$，则 $D<0$，x_0 不存在。

（ii）若 $b=\frac{a^2}{n+1}$，则 $D=0$，$x_0=\frac{a}{n+1}$.

（iii）若 $b>\frac{a^2}{n+1}$，则

$$\frac{a-\sqrt{\frac{D}{A}}}{n+1}\leqslant x_0\leqslant\frac{a+\sqrt{\frac{D}{A}}}{n+1}.$$

例 10 设 $a_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，

求证：
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(1+n^2)^2}{n}.$$

证明 $\because\ (1^2+1^2+\cdots+1^2)\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\dfrac{1}{a_i}\right)^2$

$$\geqslant\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\right]^2$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right]^2.$$

$\because\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$， 又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\geqslant n^2$，

$\therefore\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\dfrac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\dfrac{(1+n^2)^2}{n}.$

本例中，当 $n=2$, 3 时，便是常见的习题：

1．设 $a, b\in R^+$，且 $a+b=1$，

则
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

2．设 $a, b, c\in R^+$，且 $a+b+c=1$，则

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant\frac{100}{3}.$$

例 11 设 $a, b, c, d\in R^+$，且 $a+b+c+d=1$，

求证：$\sqrt{7a+5}+\sqrt{7b+5}+\sqrt{7c+5}+\sqrt{7d+5}\leqslant6\sqrt{3}$．

证明 由柯西不等式，得

$$4\cdot27=4[(7a+5)+(7b+5)+(7c+5)+(7d+5)]$$
$$\geqslant(\sqrt{7a+5}+\sqrt{7b+5}+\sqrt{7c+5}+\sqrt{7d+5})^2,$$

$$\therefore\quad \sqrt{7a+5}+\sqrt{7b+5}+\sqrt{7b+5}+\sqrt{7b+5}\leqslant 6\sqrt{3}.$$

当且仅当 $\dfrac{1}{\sqrt{7a+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{7b+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{7c+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{7d+5}}$，即 $a=b=c=d$ 时等号成立.

例12 已知 $a,\ b,\ c,\ d\in R^+$，且 $S=a+b+c+d$，

求证：
$$\sqrt{(S+a+b)(S+c+d)}$$
$$\geqslant\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(a+d)}$$
$$+\sqrt{(b+c)(b+d)}.$$

证明 $\because$ $a,\ b,\ c,\ d$ 都为正数，且 $S=a+b+c+d$，

$$\therefore\quad (S+a+b)(S+c+d)$$
$$=(2a+2b+c+d)(a+b+2c+2d)$$
$$=[(\sqrt{a+b})^2+(\sqrt{a+c})^2+(\sqrt{b+d})^2]$$
$$\cdot[(\sqrt{c+d})^2+(\sqrt{a+d})^2+(\sqrt{b+c})^2]$$
$$\geqslant(\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}+\sqrt{a+c}\cdot\sqrt{a+d}$$
$$+\sqrt{b+d}\cdot\sqrt{b+c})^2,$$
$$\therefore\quad \sqrt{(S+a+b)(S+c+d)}$$
$$\geqslant\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(a+d)}$$
$$+\sqrt{(b+c)(b+d)}.$$

例13 已知 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n;\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 均为正数，且满足 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^3$，求证：

$$\frac{b_1^3}{a_1}+\frac{b_2^3}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^3}{a_n}\geqslant 1,$$

并确定等号成立的条件.

证明 由题设及柯西不等式，有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\left(\frac{b_1^3}{a_1}+\frac{b_2^3}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^3}{a_n}\right)$$

$$=[(\sqrt{a_1b_1})^2+(\sqrt{a_2b_2})^2+\cdots+(\sqrt{a_nb_n})^2]$$

$$\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{b_1^3}{a_1}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b_2^3}{a_2}}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{\frac{b_n^3}{a_n}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left[\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{\frac{b_1^3}{a_1}}+\sqrt{a_2b_2}\cdot\sqrt{\frac{b_2^3}{a_2}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\sqrt{a_nb_n}\cdot\sqrt{\frac{b_n^3}{a_n}}\right]^2$$

$$=(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^2$$

$$=\sqrt{(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^3}$$

$$=\sqrt{(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$$

$$\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

故 $$\frac{b_1^3}{a_1}+\frac{b_2^3}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^3}{a_n}\geqslant 1.$$

等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立。

例 14 已知 a, b 为正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，证明：对每一个 $n\in N$，有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

（1988 年全国高中数学联赛试题）

证明 $\because\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, a, $b\in R^+$,

$$\therefore\ ab=a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore\ a+b=ab\geqslant 4. \tag{6.4}$$

又 $$(a-1)(b-1)=ab-(a+b)+1=1, \tag{6.5}$$

由(6.4)、(6.5)及柯西不等式得

$(a+b)^n-a^n-b^n$

$=(ab)^n-a^n-b^n+1-1=(a^n-1)(b^n-1)-1$

$=(a-1)(b-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots$

$+a+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1)-1$

$=[(a^{\frac{n-1}{2}})^2+(a^{\frac{n-2}{2}})^2+\cdots+(a^{\frac{1}{2}})^2+1][(b^{\frac{n-1}{2}})^2$

$+(a^{\frac{n-2}{2}})^2+\cdots+(b^{\frac{1}{2}})^2+1]-1$

$\geqslant[(ab)^{\frac{n-1}{2}}+(ab)^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+(ab)^{\frac{1}{2}}+1]^2-1$

$\geqslant(4^{\frac{n-1}{2}}+4^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+4^{\frac{1}{2}}+1)^2-1$

$=(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1)^2-1$

$=(2^n-1)^2-1=2^{2n}-2^{n+1}$,

$\therefore\ (a+b)^n-a^n-b^n\geqslant2^{2n}-2^{n+1}$.

例15 (1) 若 $\log_a xyz=9$, 求证:

$\log_x a+\log_y a+\log_z a\geqslant1$. $(a, x, y, z>1)$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 求证:

$\sqrt{\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+8}$

$+\sqrt{\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+8}+\sqrt{\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A+8}\leqslant5\sqrt{3}$.

证明 (1) 由柯西不等式, 有

$(\log_x a+\log_y a+\log_z a)(\log_a x+\log_a y+\log_a z)$

$\geqslant(\log_x a\log_a x+\log_y a\log_a y+\log_z a\log_a z)^2$

$=(1+1+1)^2$,

即 $(\log_x a+\log_y a+\log_z a)\log_a xyz\geqslant9$,

故 $\log_x a+\log_y a+\log_z a\geqslant1$.

(2) $\because$ $(\sqrt{\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+8}+\sqrt{\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+8}$

$+\sqrt{\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A+8})^2$

$\leqslant[(\sqrt{\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+8})^2+(\sqrt{\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+8})^2$

$$+(\sqrt{\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A+8})^2][1^2+1^2+1^2]$$

$$=3(\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A+24).$$

在 $\triangle ABC$ 中，易知

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A=1,$$

故
$$\sqrt{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B+8}+\sqrt{\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+8}+\sqrt{\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A+8} \leqslant 5\sqrt{3}.$$

例 16 求证：$yz+zx+xy-9xyz \geqslant 0$，其中 x, y, z 为非负实数，满足 $x+y+z=1$.

证明 $\because$ $x+y+z=1$，由柯西不等式得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{y}} \cdot \sqrt{y}+\sqrt{\frac{1}{z}} \cdot \sqrt{z}\right)^2=9,$$

去分母得
$$yz+zx+xy \geqslant 9xyz,$$

即
$$yz+zx+xy-9xyz \geqslant 0.$$

说明：这道题比 1984 年第 25 届 IMO 试题第一题稍强．原题是：

求证：$0 \leqslant yz+zx+xy-2xyz \leqslant \frac{7}{27}$，其中 x, y, z 为非负实数，满足 $x+y+z=1$.

例 17 设 $x+y+z=a(a>0)$，$x^2+y^2+z^2+w^2=\frac{a^2}{3}$，求证

$$0 \leqslant x, y, z, w \leqslant \frac{a}{2}. \tag{6.6}$$

下面证明(6.6)式的一种推广形式：

命题 1 设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$，且

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\frac{a^2}{n-1}(a>0),$$

求证：$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都不能是负数，也都不能大于 $\frac{2a}{n}$.

证明　由柯西不等式，可得

$$(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)\geqslant(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^2. \tag{6.7}$$

由题设，得

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=a-x_n,\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=\frac{a^2}{n-1}-x_n^2.$$

代入(6.7)式得

$$(n-1)\left(\frac{a^2}{n-1}-x_n^2\right)\geqslant(a-x_n)^2,$$

即
$$a^2-(n-1)x_n^2\geqslant a^2-2ax_n+x_n^2,$$

$$\therefore\quad nx_n^2-2ax_n\leqslant 0,\quad\therefore\quad 0\leqslant x_n\leqslant\frac{2a}{n}.$$

$\because$　题中条件关于 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是对称的，故有

$$0\leqslant x_i\leqslant\frac{2a}{n}.$$

而且可以证明 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全相等．若 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，

则
$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{n},$$

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n\left(\frac{a}{n}\right)^2.$$

但
$$n\left(\frac{a}{n}\right)^2\neq\frac{a^2}{n-1},$$

故 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全相等．

更一般地，还可以推广为：

命题2　设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_n=a\ (a>0)$．$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\lambda a^2\left(\lambda\geqslant\frac{2}{n}\right)$，则有

$$\frac{a}{n}(1-\sqrt{(n-1)(n\lambda-2)})\leqslant x_i,$$

$$y_i\leqslant\frac{a}{n}(1+\sqrt{(n-1)(n\lambda-2)}).$$

特别地，当 $\lambda=\dfrac{2n-1}{n(n-1)}$ 时，有

$$0\leqslant x_i\leqslant\frac{2a}{n},\ 0\leqslant y_i\leqslant\frac{2a}{n}.$$

证明 由对称性，不妨取 $i=n$，则由柯西不等式得

$$\begin{aligned}(a-x_n)^2&=(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^2\\&\leqslant(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{n-1}|)^2\\&\leqslant(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2).\end{aligned}$$

同理， $(a-y_n)^2\leqslant(n-1)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2)$.

两式相加得

$$\begin{aligned}&(a-x_n)^2+(a-y_n)^2\\&\leqslant(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2)\\&\leqslant(n-1)(\lambda a^2-x_n^2-y_n^2).\end{aligned}$$

移项、配方，整理得

$$(nx_n-a)^2+(ny_n-a)^2\leqslant a^2(n-1)(n\lambda-2),$$

$$|nx_n-a|\leqslant a\sqrt{(n-1)(n\lambda-2)},$$

$$|ny_n-a|\leqslant a\sqrt{(n-1)(n\lambda-2)}.$$

由此即可推得结论.

命题3 设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a(a>0)$， $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=b^2$，且 $nb^2\geqslant a^2$，则

$$\frac{a-\sqrt{(n-1)(nb^2-a^2)}}{n}\leqslant x_i\leqslant\frac{a+\sqrt{(n-1)(nb^2-a^2)}}{n}.$$

特别地，当 $b^2=\dfrac{a^2}{n-1}$ 时，命题3即变成命题1.

利用命题2的证明方法还可以得到更普遍的结论(证明从略):

命题4 设X是m行n列矩阵

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

如果矩阵X每一行的元素之和都等于$a(a>0)$,且X的所有元素的平方和等于$\lambda a^2\left(\lambda\geqslant\frac{m}{n}\right)$,则有($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)

$$\frac{a}{n}(1-\sqrt{(n-1)(n\lambda-m)})$$

$$\leqslant x_{ij}\leqslant\frac{a}{n}(1+\sqrt{(n-1)(n\lambda-m)}).$$

特别地,当$\lambda=\frac{mn-(m-1)}{n(n-1)}$时,有

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant\frac{2a}{n}.$$

在这里取$m=2$即可得到命题2.

例18 若$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+d=0$,则有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\geqslant\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_iy_i+d\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}. \tag{6.8}$$

证明 在柯西不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

中,令$b_i=x_i-y_i(i=1, 2, \cdots, n)$,则

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

$$\geqslant \frac{|a_1(x_1-y_1)+a_2(x_2-y_2)+\cdots+a_n(x_n-y_n)|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+d \\ -(a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n+d)\end{vmatrix}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}.$$

$$\because\quad a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+d=0,$$

$$\therefore \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \geqslant \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}a_iy_i+d\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}.$$

下面给出这一不等式的几何解释.

当 $n=2$ 时,(6.8)式即为:

设 $a_1x_1+a_2x_2+d=0$, 则

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \geqslant \frac{|a_1y_1+a_2y_2+d|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},$$

它等价于:

若 $Ax+By+C=0$, 则

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geqslant \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6.9)$$

其几何解释如图2, 设 $P(x_0, y_0)$ 是直线 l: $Ax+By+C=0$ 外一点, $M(x, y)$ 是 l 上一点, PN 为 P 到 l 的距离, 显然 $|PM| \geqslant |PN|$, 当 $PM \perp l$ 时取等号, 故(6.9)式成立.

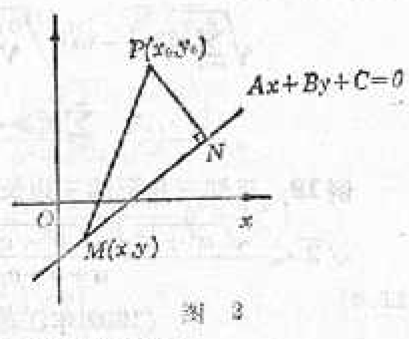


图 2

下面举三个例子说明(6.8)式的应用.

1. 设 $x+y+z=1$，求证：$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

证明 ∵ $x+y+z-1=0$，令 $y_i=0(i=1,2,3)$，由不等式(6.8)，有

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

2. 已知 $x_1+y_1=1$，$x_2+y_2=3$，求两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$之间的距离最小值.

解 ∵ $x_1+y_1-1=0$，$x_2+y_2=3$，由不等式(6.8)有

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\geqslant\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|3-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

故 P_1，P_2 间距离的最小值为 $\sqrt{2}$.

3. 若实数 x_1，x_2，…，x_n 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=m$，

求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\frac{m^2}{n}$.

证明 由不等式(6.8)知 $d=-m$，$a_i=1$，令 $y_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\geqslant|-m|\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1^2}=\frac{|m|}{\sqrt{n}},$$

$$\therefore\quad\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\frac{m^2}{n}.$$

例 19 已知三角形的三边长分别为 a，b，c，求证：

$$\sqrt{2}\leqslant\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{a+b+c}<\sqrt{3}.$$

（1992 年江苏省数学夏令营选拔赛试题）

证明 ∵ $(a-b)^2<c^2\Rightarrow a^2+b^2<c^2+2ab$.

同理 $b^2+c^2<a^2+2bc,\ c^2+a^2<b^2+2ac.$

$$\therefore\quad 2(a^2+b^2+c^2)<(a+b+c)^2.$$

由柯西不等式，得

$$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2$$
$$\leqslant[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)](1+1+1)$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)\cdot 3<3(a+b+c)^2,$$
$$\therefore\quad \frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{a+b+c}<\sqrt{3}.$$

上面的结论可以加强为：

已知三角形的三边长分别为 $a,\ b,\ c$，求证：

$$A=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{a+b+c}<1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证明 分段讨论：

(1) 原命题等价于

$$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2$$
$$<\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(a+b+c)^2. \tag{6.10}$$

由柯西不等式，得

$$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2$$
$$\leqslant\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{b^2+c^2})^2\right.$$
$$\left.+(\sqrt{c^2+a^2})^2\right](\sqrt{2}+1+1),$$

即
$$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2$$
$$\leqslant\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}a^2+\frac{2+\sqrt{2}}{2}b^2+2c^2\right)$$
$$\cdot\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2\right]. \tag{6.11}$$

比较(6.10)和(6.11)知，只须证明

$$2\times\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}a^2+\frac{2+\sqrt{2}}{2}b^2+2c^2\right)$$

$$<\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(a+b+c)^2,$$

即 $$(2+\sqrt{2})a^2+(2+\sqrt{2})b^2+4c^2$$

$$<\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)[a^2+(b+c)]+(2+\sqrt{2})a(b+c). \tag{6.12}$$

(2) 下面证明(6.12)式:

(i) 若 $c\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{4}a$, 即

$$(2+\sqrt{2})a\geqslant 4c,$$

则有 $$(2+\sqrt{2})a(b+c)$$

$$=(2+\sqrt{2})ab+(2+\sqrt{2})ac$$

$$\geqslant(2+\sqrt{2})b^2+4c^2, \tag{6.13}$$

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)[a^2+(b+c)^2]$$

$$>\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 2a^2=(2+\sqrt{2})a^2. \tag{6.14}$$

由(6.13)、(6.14)两式知: 当 $c\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{4}a$ 时, (6.12)式成立.

(ii) 若 $c>\frac{2+\sqrt{2}}{2}a$, $\because$ $b\geqslant c$, $\therefore$ $b+c\geqslant 2c>\frac{2+\sqrt{2}}{2}a=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$.

现令(6.12)式右端为 B, 则

$$B=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)[a^2+(b+c)^2]$$

$$+(2+\sqrt{2})ab+(2+\sqrt{2})ac$$

$$>\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left\{a^2+\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)c\right]^2\right\}$$

$$+(2+\sqrt{2})ab+(2+\sqrt{2})ac$$

$$=\left(2+\sqrt{2}\right)a^2+\left(\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)a^2$$

$$+(2+\sqrt{2})ab+(2+\sqrt{2})ac.$$

$$\because \quad a\geqslant b\geqslant c,$$

$$\therefore \quad (2+\sqrt{2})ab\geqslant(2+\sqrt{2})b^2, \qquad (6.15)$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)a^2\geqslant 2c^2, \qquad (6.16)$$

$$(2+\sqrt{2})ac>2c^2. \qquad (6.17)$$

由(6.15)、(6.16)、(6.17)式知：当$c>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}a$时，(6.12)式成立.

另证 应用柯西不等式，结合放缩、配方等手段来证明问题. 不妨设$a\geqslant b\geqslant c$,

$$\because \quad a<b+c,\ b<c+a,\ (7-4\sqrt{2})c<2c\leqslant a+b,$$

$$\therefore \quad (\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2$$

$$=(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}}}+1\cdot\sqrt{b^2+c^2}+1\cdot\sqrt{c^2+a^2})^2$$

$$<\left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}}+b^2+c^2+c^2+a^2\right)(\sqrt{2}+1+1).$$

这里不用"$\leqslant$"是因为等号仅在$a=b$，$c=0$时才能成立，这在三角形中是不可能的.

而 $\left(\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}}+b^2+c^2+c^2+a^2\right)(\sqrt{2}+1+1)$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left[2a^2+2b^2+(8-4\sqrt{2})c^2\right]$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left[a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+(7-4\sqrt{2})c^2\right]$$

$$<\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left[a^2+b^2+c^2+a(b+c)\right.$$

$$\left.+b(c+a)+c(a+b)\right]$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(a+b+c)^2,$$

$$\therefore\quad (\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})$$

$$<\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(a+b+c)^2,$$

即
$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{a+b+c}<1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

从上面证明过程来看，结论似乎还可加强，其实不然，$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$已是最强结论。下面用初等方法给予证明：

反证法：若结论可以加强为

$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}-s\left(0<s<1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

则对任意三角形有：

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{a+b+c}<1+\frac{\sqrt{2}}{2}-s. \tag{6.18}$$

我们可以构造这样一个三角形，使$a=b=1$，$0<c<s$，显然这样的三角形是存在的，将其代入(6.18)式得

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+c^2}+\sqrt{1+c^2}}{2+c}<1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\varepsilon. \qquad (6.19)$$

但是，$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+c^2}+\sqrt{1+c^2}}{2+c}$

$$>\frac{\sqrt{2}+1+1}{2+c}=\frac{2+\sqrt{2}}{2+c}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{2+c}$$

$$>\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2-c}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2+\sqrt{2}}{4}c$$

$$>1+\frac{\sqrt{2}}{2}-c>1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\varepsilon. \qquad (6.20)$$

可见(6.19)和(6.20)式相矛盾.

$\therefore$ 结论不能再加强，即$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$为最强结论.

例20 设n个实数x_1, x_2, $\cdots$, x_n满足$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：对任意整数$k\geqslant 2$，存在$n$个不全为零的整数$a_i$，$|a_i|\leqslant k-1(i=1, 2, \cdots, n)$，使得

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

(1987年第28届IMO试题)

证明 由柯西不等式易证：

$$(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2$$
$$\leqslant(1^2+1^2+\cdots+1^2)(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)$$
$$=n\cdot 1=n,$$

$$\therefore\quad |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}.$$

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|$$
$$\leqslant(k-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$$
$$\leqslant(k-1)\sqrt{n}.$$

把区间$[0, (k-1)\sqrt{n}]$等分成k^n-1份，每一小区间长

度为 $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$.

由于 $a_i=0, 1, \cdots, k-1 (i=1, 2, \cdots, n)$，所以一共有 k^n-1 个数 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$.

根据抽屉原则，总有两个数 $a_1'x_1+a_2'x_2+\cdots+a_n'x_n$ 和 $a_1''x_1+a_2''x_2+\cdots+a_n''x_n$ 落在同一区间内．令

$$a_i=|a_i'-a_i''| \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

则
$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

例21 设 a, b, c, d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的正实数，求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

（1990 年第 31 届 IMO 备选题）

为了证明此题，先证一个结论：

若 $A, B, a, b>0$，则

$$\frac{A^3}{a^2}+\frac{B^3}{b^2}\geqslant\frac{(A+B)^3}{(a+b)^2}. \qquad (6.21)$$

证明 $\because$
$$(A+B)^2=\left(\sqrt{a}\cdot\frac{A}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{B}{\sqrt{b}}\right)^2$$
$$\leqslant(a+b)\left(\frac{A^2}{a}+\frac{B^2}{b}\right)$$
$$=(a+b)\left(A^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{A^{\frac{3}{2}}}{a}+B^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{B^{\frac{3}{2}}}{b}\right)$$
$$\leqslant(a+b)\sqrt{A+B}\sqrt{\frac{A^3}{a^2}+\frac{B^3}{b^2}},$$

$$\therefore\quad \frac{A^3}{a^2}+\frac{B^3}{b^2}\geqslant\frac{(A+B)^3}{(a+b)^2}.$$

当 $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}$ 时式中等号成立.

由不等式(6.24), 易证

$$\frac{A^3}{a^2}+\frac{B^3}{b^2}+\frac{C^3}{c^2}+\frac{D^3}{d^2}\geqslant\frac{(A+B+C+D)^3}{(a+b+c+d)^2}.$$

下面来证明例 21:

$\because$ a, b, c, d 均为正数, 且 $ab+bc+cd+da=1$, 即

$$(a+c)(b+d)=1,$$

则

$$(a+b+c+d)^2\geqslant4.$$

又 $(a+b+c)^{\frac{1}{2}}+(b+c+d)^{\frac{1}{2}}+(c+d+a)^{\frac{1}{2}}+(d+a+b)^{\frac{1}{2}}$

$$\leqslant4(a+b+c+b+c+d+c+d+a+d+a+b)$$

$$=12(a+b+c+d).$$

左边 $=\dfrac{a^3}{(\sqrt{b+c+d})^2}+\dfrac{b^3}{(\sqrt{c+d+a})^2}+\dfrac{c^3}{(\sqrt{d+a+b})^2}$

$$+\frac{d^3}{(\sqrt{a+b+c})^2}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c+d)^3}{(\sqrt{b+c+d}+\sqrt{c+d+a}+\sqrt{d+a+b}+\sqrt{a+b+c})^2}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c+d)^3}{12(a+b+c+d)}=\frac{1}{12}(a+b+c+d)^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

当 $a=b=c=d=\dfrac{1}{2}$ 时, 式中等号成立.

例 22 已知 $a_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n$, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, 则有

$$n-1+\sqrt{5}<\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\cdots+\sqrt{4a_n+1}$$

$$\leqslant\sqrt{n(n+1)}.$$

证明　由柯西不等式, 得

$$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\cdots+\sqrt{4a_n+1}$$
$$\leqslant\sqrt{(4a_1+1+4a_2+1+\cdots+4a_n+1)}$$
$$\cdot\sqrt{1^2+1^2+\cdots+1^2}$$
$$=\sqrt{[4(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n]n}$$
$$=\sqrt{n(n+4)}.$$

又由已知有 $0<a_i<1(i=1, 2, \cdots, n)$，

$$\therefore\quad 0<a_i^2<a_i<1.$$

设 $1+4a_1=1+2ka_1+k^2a_1$，得

$$k_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}.$$

又 $$\sqrt{1+4a_1}=\sqrt{1+2ka_1+k^2a_1}$$
$$>\sqrt{1+2ka_1+k^2a_1^2}=|1+k_1a|.$$

取 $k=\sqrt{5}-1$，则有

$$\sqrt{1+4a_1}>1+(\sqrt{5}-1)a_1,$$

同理 $$\sqrt{1+4a_2}>1+(\sqrt{5}-1)a_2,$$

……

$$\sqrt{1+4a_n}>1+(\sqrt{5}-1)a_n.$$

将上述 n 个式子相加得

$$\sqrt{1+4a_1}+\sqrt{1+4a_2}+\cdots+\sqrt{1+4a_n}$$
$$>n+(\sqrt{5}-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$=n-1+\sqrt{5}.$$

七、求函数的极值

有些极值问题，特别是带有约束条件的极值问题，运用柯西不等式往往容易奏效.

例1 若 $x, y, z\in R^+$，且 $3x+2y+z=39$，求 $\sqrt{x}+\sqrt{2y}+\sqrt{3z}$ 的最大值.

解 $\because \quad x, y, z>0,$

$$\therefore \quad (3x+2y+z)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2+(\sqrt{3})^2\right]$$

$$\geqslant\left(\sqrt{3x}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2y}\cdot 1+\sqrt{z}\cdot\sqrt{3}\right)^2$$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{2y}+\sqrt{3z})^2.$$

即
$$39\cdot\frac{13}{3}\geqslant(\sqrt{x}+\sqrt{2y}+\sqrt{3z})^2,$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{2y}+\sqrt{3z})^2\leqslant 13^2,$$

$$\therefore \quad \sqrt{x}+\sqrt{2y}+\sqrt{3z}\leqslant 13.$$

$$\because \quad \begin{cases}3x+2y+z=39,\\ \sqrt{3x}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{2y}/1=\sqrt{z}/\sqrt{3}\end{cases} \text{有解,}$$

$\therefore \quad \sqrt{x}+\sqrt{2y}+\sqrt{3z}$ 的最大值为 13.

例2 若 $2x-3y=1$，求 x^2+y^2 的最小值，并计算出这时 x、y 的值.

解 $\because \quad (x^2+y^2)[2^2+(-3)^2]\geqslant(2x-3y)^2,$

$$\therefore \quad 13(x^2+y^2)\geqslant 1,\quad x^2+y^2\geqslant\frac{1}{13}.$$

其中等号当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}$ 时成立。

由 $\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}\\ 2x-3y=1\end{cases}$ 解得 $x=\frac{2}{13}$, $y=-\frac{3}{13}$.

故当 $x=\frac{2}{13}$, $y=-\frac{3}{13}$ 时，x^2+y^2 取得最小值，最小值为 $\frac{1}{13}$.

例 3 求函数 $y=\sqrt{x-6}+\sqrt{12-x}$ 的最大值，并问当 x 为何值时，函数 y 有最大值？

解 $\because$ $(\sqrt{x-6}+\sqrt{13-x})^2$

$$\leqslant[(\sqrt{x-6})^2+(\sqrt{13-x})^2](1^2+1^2)=12,$$

$\therefore$ $\sqrt{x-6}+\sqrt{12-x}\leqslant 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 当 $\sqrt{x-6}/1=\sqrt{12-x}/1$ 即 $x=9$ 时，函数 y 有最大值 $2\sqrt{3}$.

例 4 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=k$，求 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中每两个之积的和的最大值.

解 $\because$ $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot 1\right)^2$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)(1^2+1^2+\cdots+1^2)=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant\frac{k^2}{n}.$$

而 $$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j,$$

$$k^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j,$$

$\therefore$ $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j=\frac{k^2-\sum_{i=1}^{n}a_i}{2}\leqslant\frac{k^2-\frac{k^2}{n}}{2}=\frac{(n-1)k^2}{2n}.$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j$ 有最大值 $\frac{(n-1)k^2}{2n}$.

作为特例，当 $n=3$，即 $a_1+a_2+a_3=k$ 时，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 有最大值 $\frac{k^2}{3}$. 它的几何意义是：三度之和为定值 k 的长方体中，正方体的表面积最大，其最大值为 $\frac{2}{3}k^2$.

例5 若 $A, B, C, D>0$，且 $ax+by+cz+dw=e$，则 $Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2$ 的极小值为

$$m=e^2\Big/\left(\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}+\frac{d^2}{D}\right).$$

证明 由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}
e^2&=(ax+by+cz+dw)^2\\
&=\left(\frac{a}{\sqrt{A}}\cdot\sqrt{A}x+\frac{b}{\sqrt{B}}\cdot\sqrt{B}y\right.\\
&\qquad\left.+\frac{c}{\sqrt{C}}\cdot\sqrt{C}z+\frac{d}{\sqrt{D}}\cdot\sqrt{D}y\right)^2\\
&\leqslant\left(\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}+\frac{d^2}{D}\right)(Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2\\
&\qquad\geqslant e^2\Big/\left(\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}+\frac{d^2}{D}\right).
\end{aligned}$$

要求出使 $Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2$ 取得最小值的点，只需联立 $\frac{A}{a}x=\frac{B}{b}y=\frac{C}{c}z=\frac{D}{d}w$ 及 $ax+by+cz+dw=e$ 解出 (x, y, z, w) 即得.

类似地，可以得到下面的结论：

已知非零常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和正的常数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，又 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实的变量，且令

$$P=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

$$S=b_1x_1^2+b_2x_2^2+\cdots+b_nx_n^2.$$

则 (1) 当 P 为定值时，S 有最小值，当且仅当

$$x_i=a_iP/b_i\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$时，S 取最小值，且最小值为

$$S_{\min}=P^2\Big/\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right).$$

(2) 当 S 为定值时，P 有最大值与最小值，当且仅当

$$x_i=\frac{b_i}{a_i}\sqrt{S\Big/\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)}$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$时，P 取最大值，且最大值为

$$P_{\max}=\sqrt{S\Big/\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)};$$

当且仅当 $x_i=-\frac{b_i}{a_i}\sqrt{S\Big/\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)}(i=1,2,\cdots,$ $n)$时，P 取最小值，且最小值为

$$P_{\min}=-\sqrt{S\Big/\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)}.$$

证明 为了方便起见，记

$$M=\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n},$$

则由柯西不等式，得

$$P^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\cdot\sqrt{b_i}x_i\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^2\right)=MS.$$

等号当且仅当 $b_1x_1/a_1=b_2x_2/a_2=\cdots=b_nx_n/a_n$ 时成立．于是

(1) 当 P 为定值时，$S\geqslant P^2/M$，等号当且仅当

$$b_1x_1/a_1=b_2x_2/a_2=\cdots=b_nx_n/a_n=k$$

时成立，亦即 $x_i=\frac{a_i}{b_i}k(i=1, 2, \cdots, n)$. 但由

$$P=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\frac{a_i}{b_i}k=kM, \quad \therefore \quad k=\frac{P}{M}.$$

故 $x_i=a_iP/b_iM$ 时，S 才取最小值，且 $S_{\min}=P^2/M$.

(2) 当 S 为定值时，$P^2\leqslant SM$.

等号当且仅当

$$b_1x_1/a_1=b_2x_2/a_2=\cdots=b_nx_n/a_n=k$$

时成立，亦即 $x_i=\frac{a_i}{b_i}k(i=1, 2, \cdots, n)$. 但由

$$S=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot\frac{a_i^2}{b_i^2}k^2=k^2\cdot M,$$

$$\therefore \quad k^2=S/M, \quad k=\pm\sqrt{S/M}.$$

故当且仅当 $x_i=a_i/b_i\sqrt{S/M}\,(i=1, 2, \cdots, n)$时，

P 取最大值，

$$P_{\max}=\sqrt{SM}.$$

当且仅当 $x_i=-\frac{a_i}{b_i}\sqrt{S/M}\,(i=1, 2, \cdots, n)$时，

P 取最小值，

$$P_{\min}=-\sqrt{SM}.$$

上面这个结论可以解决许多问题.

例 6 已知 $3x^2+2y^2+4z^2=24$，试求 $W=7x+y-5z$ 的最大值与最小值.

解 $\because$ $W^2=(7x+y-5z)^2$

$$=\left[\frac{7}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}y+\frac{-5}{2}\times 2z\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{49}{3}+\frac{1}{2}+\frac{25}{4}\right)(3x^2+2y^2+4z^2)$$

$$=\frac{277}{12}\times 24=554,$$

$$\therefore\quad -\sqrt{554}\leqslant W\leqslant\sqrt{554}.$$

W的最大值为$\sqrt{554}$，最小值为$-\sqrt{554}$.

例 7　已知$5x_1+6x_2-7x_3+4x_4=1$，试求$y=3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2$的最小值.

解　$\because$　$1^2=(5x_1+6x_2-7x_3+4x_4)^2$

$$=\left[\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}x_1+\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}x_2+\frac{-7}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}x_3+4x_4\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{25}{3}+\frac{36}{2}+\frac{49}{5}+16\right)(3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2)$$

$$=\frac{782}{15}y,$$

$\therefore$　$y\geqslant\frac{15}{782}$，故y的最小值为$\frac{15}{782}$.

例 8　已知$2x+y-3z+w=8$，试求$u=5(x-y)^2+4(y-z)^2+3w^2$的最小值，何时达到这个最小值？

解　$\because$　$2(x-y)+3(y-z)+w=2x+y-3z+w=8$，

$\therefore$　$8^2=[2(x-y)+3(y-z)+w]^2$

$$=\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}(x-y)+\frac{3}{2}\cdot 2(y-z)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}w\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{4}{5}+\frac{9}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot[5(x-y)^2+4(y-z)^2+3w^2]=\frac{203}{60}u,$$

$$\therefore \quad u \geqslant \frac{60 \times 64}{203} = \frac{3840}{203}.$$

当 $\dfrac{5(x-y)}{2} = \dfrac{4(y-z)}{3} = 3w$ 时，即

$$x-y=\frac{6w}{5}, \quad y-z=\frac{9w}{4}$$

时，u 达到最小值.

又 $\because \quad (2x-y)+3(y-z)+w=8,$

$$\therefore \quad \frac{12}{5}w+\frac{27}{4}w+w=8, \quad \therefore \quad w=\frac{160}{203},$$

$\therefore \quad x-y=\dfrac{960}{1015}, \quad y-z=\dfrac{360}{203}$ 时，u 取最小值 $\dfrac{3840}{203}$.

例 9 已知 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求

$$y=-x_1+\sqrt{2}x_2-\sqrt{3}x_3+\cdots+(-1)^n\sqrt{n}x_n$$

的最大值与最小值.

解 $\because \quad y^2=[-x_1+\sqrt{2}x_2-\sqrt{3}x_3+\cdots$

$$+(-1)^n\sqrt{n}x_n]^2$$

$$\leqslant(1+2+\cdots+n)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\therefore \quad -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant y \leqslant \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

故 y 的最小值为 $-\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$，最大值为 $\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

例 10 已知 a, b, c, d, e 是满足

$$a+b+c+d+e=8, \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$$

的实数，试确定 e 的最大值.

（1978 年第 7 届美国数学奥林匹克试题）

解 由已知及柯西不等式，得

$$8-e=(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+1\cdot d)$$

$$\leqslant(1+1+1+1)^{\frac{1}{2}}(a^2+b^2+c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2(16-e)^{\frac{1}{2}},$$

即
$$(8-e)^2\leqslant 4(16-e^2),$$

$$\therefore\quad e(5e-16)\leqslant 0,\quad \therefore\quad 0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}.$$

故当且仅当 $a=b=c=d=\frac{16}{5}$ 时，e 有最大值 $\frac{16}{5}$.

例 11 已知实数 a, b, c, d, e 满足:

$$3a+2b-c+4d+\sqrt{133}e=\sqrt{133},$$

$$2a^2+3b^2+3c^2+d^2+6e^2=60,$$

试确定 e 的最大值和最小值.

解 将已知条件改写为

$$3a+2b-c+4d=\sqrt{133}-\sqrt{133}e,$$

$$2a^2+3b^2+3c^2+d^2=60-6e^2.$$

$$\because\quad (\sqrt{133}-\sqrt{133}e)^2$$

$$=(3a+2b-c+4d)^2$$

$$=\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}a+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}b+\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}c+4d\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{9}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+16\right)(2a^2+3b^2+3c^2+d^2)$$

$$=\frac{133}{6}(60-6e^2)=133(10-e^2),$$

$$\therefore\quad (\sqrt{133}-\sqrt{133}e)^2\leqslant 133(10-e^2).$$

即 $2e^2-2e-9\leqslant 0$, 解之得

$$\frac{1-\sqrt{19}}{2}\leqslant e\leqslant\frac{1+\sqrt{19}}{2},$$

仅当 $2a/3=3b/2=-3c=d/4$ 时，不等式 $2e^2-2e-9\leqslant 0$ 中

的等号才成立，也即只有这时 e 才取得最大值与最小值.

由 $\dfrac{2a}{3}=\dfrac{3b}{2}=-3c=\dfrac{d}{4}$ 可得 $a=\dfrac{3d}{8}$，$b=\dfrac{d}{6}$，$c=-\dfrac{d}{12}$，将它们分别代入

$$3a+2b-c+4d=\sqrt{133}-\sqrt{133}e$$

与

$$2a^2+3b^2+3c^2+d^2=60-6e^2,$$

可得 $\quad d=\dfrac{24(1-e)}{\sqrt{133}}\quad$ 及 $\quad d^2=\dfrac{96(60-6e^2)}{133}$.

解得 $\quad d_1=\dfrac{12(\sqrt{133}+19\sqrt{7})}{133}$，$e_1=\dfrac{1-\sqrt{19}}{2}$；

$$d_2=\frac{12(\sqrt{133}-19\sqrt{7})}{133},\ e_2=\frac{1+\sqrt{19}}{2}$$

∴ 当 $a=\dfrac{3}{8}d_1$，$b=\dfrac{1}{6}d_1$，$c=-\dfrac{1}{12}d_1$，$d=d_1$ 时，e 取最小值 $\dfrac{1-\sqrt{19}}{2}$.

当 $a=\dfrac{3}{8}d_2$，$c=\dfrac{1}{6}d_2$，$b=-\dfrac{1}{12}d_2$，$d=d_2$ 时，e 取最大值 $\dfrac{1+\sqrt{19}}{2}$.

例 12 m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为 1987，对于所有这样的 m 与 n，问 $3m+4n$ 的最大值是多少？请证明你的结论.

（1987 年第 2 届全国数学冬令营试题）

解 $3m+4n$ 的最大值为 221.

下面进行证明：

设 $\quad a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_n=1987,$

其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是互不相同的正偶数，$b_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是互不相同的正奇数.

显然，n 一定是奇数，且

$$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant 2+4+\cdots+2m=m(m+1),$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

所以 $m^2+m+n^2\leqslant 1987$，其中 n 为奇数，即

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\leqslant 1987+\frac{1}{4}.$$

由柯西不等式，得

$$3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n$$
$$\leqslant\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}},$$

$$3m+4n\leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}.$$

由于 $3m+4n$ 是整数，所以

$$3m+4n\leqslant\left[5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\right],$$

即 $$3m+4n\leqslant 221.$$

易证，方程 $3m+4n=221$ 的整数解的一般形式

是 $$\begin{cases}m=71-4k,\\ n=2+3k.\end{cases}\quad (k\text{ 是整数})\tag{7.1}$$

因为 n 是奇数，所以(7.1)式中的 k 必须是奇数，设 $k=2t+1$，t 为整数，则

$$\begin{cases}m=67-8t,\\ n=5+6t.\end{cases}\quad (t\text{ 是整数})\tag{7.2}$$

因为 m^2，$n^2\leqslant 1987$，所以

$$m、n\leqslant[\sqrt{1987}]=44.$$

代入(7.2)式得出

$$4\leqslant t\leqslant 6.$$

用 $t=4, 5, 6$ 分别代入(7.2)式可知，(m, n)只能是(35, 29)，(27, 35)及(19, 41)三组值。

不难验证(35, 29)，(19, 41)两组值不满足关系式

$$m(m+1)+n^2\leqslant 1987.$$

对于(27, 35)，由于

$$27(27+1)+35^2=1981<1987,$$

所以适当选取 27 个正偶数和 35 个正奇数的值，就可使这些数的和恰为 1987。

例如，由

$$2+4+\cdots+54+1+3+\cdots+67+69=1981,$$

则 $$2+4+\cdots+54+1+3+\cdots+67+75=1987.$$

综上讨论，$3m+4n$ 的最大值是 221，而且只能在 $m=27$，$n=35$ 时才能达到最大值。

例 13　四个正数之和为 4，平方和为 8，确定这四个数中最大的那个的最大值。

(1989 年第 30 届加拿大 IMO 训练题)

解　设 $$a\geqslant b\geqslant c\geqslant d>0,$$

$$a+b+c+d=4,\ a^2+b^2+c^2+d^2=8,$$

则 $$b+c+d=4-a,\ b^2+c^2+d^2=8-a^2.$$

由柯西不等式，得

$$3(b^2+c^2+d^2)\geqslant(b+c+d)^2,$$

即 $$3(8-a^2)\geqslant(4-a)^2.$$

上式等价于 $$a^2-2a-2\leqslant 0,$$

从而 $$a\leqslant\sqrt{3}+1.$$

因此，a 的最大值为 $\sqrt{3}+1$，取这最大值时，

$$b=c=d=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 14 设 u, v 为正实数，求 u, v 所需满足的充分必要条件，使得对给定 n，存在实数满足

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0,$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = u,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = v.$$

当这些数存在时，求 a_1 的最大值与最小值.

（1989 年第 30 届加拿大 IMO 训练题）

解 若有满足条件的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，则由柯西不等式，得

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

又显然有 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$,

因此

$$nv \geqslant u^2 \geqslant v. \qquad (7.3)$$

(7.3)是必要条件，也是充分条件. 事实上，在(7.3)成立时，可取

$$a_1 = \frac{u + \sqrt{(n-1)(nv - u^2)}}{n}\left(< \frac{u + (n-1)u}{n} = u\right),$$

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \frac{u - a_1}{n-1}.$$

a_1 的最大值就是 $\frac{u + \sqrt{(n-1)(nv - u^2)}}{n}$，因为 a_1 若比这个值大，则

$$na_1^2 - 2ua_1 + u^2 - (n-1)v > 0, \qquad (7.4)$$

即

$$(n-1)(v - a_1^2) < (u - a_1)^2. \qquad (7.5)$$

而由柯西不等式，得

$$(n-1)(a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) \geqslant (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2, \qquad (7.6)$$

(7.5)与(7.6)矛盾.

现在考虑 a_1 的最小值，显然 $a_1 \geqslant \frac{u}{n}$，当且仅当 $nv=u^2$ 时等号成立.

设 $\frac{u}{k} \geqslant a_1 \geqslant \frac{u}{k+1}$（整数 $k \in [1, n-1]$），

由于

$$a_i^2+a_j^2 \leqslant (a_i+a_j)^2, \tag{7.7}$$

$$a_i^2+a_j^2 \leqslant a_1^2+(a_i+a_j-a_1)^2, \tag{7.8}$$

所以经过有限多次使用(7.7)（如果 $a_i+a_j \leqslant a_1$）与(7.8)式（如果 $a_i+a_j > a_1$），即得

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \leqslant k a_1^2+(u-k a_1)^2, \tag{7.9}$$

即

$$v \leqslant k a_1^2+(u-k a_1)^2, \tag{7.10}$$

或写成 a_1 的二次不等式

$$k(k+1) a_1^2-2 k u a_1+u^2-v \geqslant 0. \tag{7.11}$$

若 $v \leqslant \frac{u^2}{k+1}$，则(7.11)恒成立，这时 a_1 最小为 $\frac{u}{k+1}$；

若 $v > \frac{u^2}{k+1}$，则(7.11)当且仅当

$$a_1 \geqslant \frac{k u+\sqrt{k\left[(k+1) v-u^2\right]}}{k(k+1)} \tag{7.12}$$

时成立. 由于 $a_1 \leqslant u/k$，所以

$$\frac{k u+\sqrt{k\left[(k+1) v-u^2\right]}}{k(k+1)} \leqslant \frac{u}{k}, \tag{7.13}$$

从而

$$v \leqslant u^2/k.$$

于是当 $\frac{u^2}{k} \geqslant v > \frac{u}{k+1}$ 时，a_1 的最小值为

$$\frac{k u+\sqrt{k\left[(k+1) v-u^2\right]}}{k(k+1)} \quad (k=1, 2, \cdots, n-1).$$

例15 如图3，求边长为 a、b、c、d 的凸四边形的最大面积和取到最大面积的条件。

解 连结 BD，记 $BD=x$，$a+b+c+d=2p$，$a+d+x=2m$，$b+c+x=2n$，四边形 $ABCD$ 的面积为

$$S=\sqrt{m(m-x)(m-a)(m-d)}+\sqrt{n(n-x)(n-b)(n-c)}.$$

令 $\sqrt{m(m-x)}=a_1$，$\sqrt{(m-a)(m-d)}=b_1$，

$\sqrt{(n-b)(n-c)}=a_2$，$\sqrt{n(n-x)}=b_2$。

由柯西不等式

$$S^2\leqslant[m(m-x)+(n-b)(n-c)]\cdot[(m-a)(m-d)+n(n-x)].$$

右边经整理，可化为

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

于是 $S^2\leqslant(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$。

当且仅当

$$\frac{m(m-x)}{(m-a)(m-d)}=\frac{(n-b)(n-c)}{n(n-x)} \tag{7.14}$$

时，等号才成立，这时 S 取最大值：

$$S_{\max}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

(7.14)式经整理得

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

设 $AC=y$，同样可推得 S 取最大值时

$$y^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

于是 $xy=ac+bd$。这表示四边形 $ABCD$ 取最大面积的条件是 $ABCD$ 内接于圆。

将上述内容归结为如下命题：

边长依次为 a, b, c, d 的凸四边形中，面积最大的为内接于圆的四边形，

$$S_{max}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

由此可得推论：

周长为定值 $2p$ 的四边形中面积最大者为正方形，其面积为 $S=\frac{p^2}{4}$.

证明　设该四边形的边长依次为 a, b, c, d，则

$$2p=a+b+c+d.$$

由上述命题，其面积最大者为圆内接四边形，最大面积为

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

由均值不等式，得

$$\sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$\leqslant\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4},$$

即
$$\sqrt{S}\leqslant\frac{p}{2},\quad S\leqslant\frac{p^2}{4}.$$

当且仅当
$$p-a=p-b=p-c=p-d,$$

即 $a=b=c=d$ 时，$S_{max}=\frac{p^2}{4}$. 该四边形各边相等又内接于圆，故必为正方形.

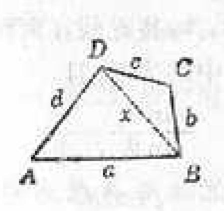


图　3

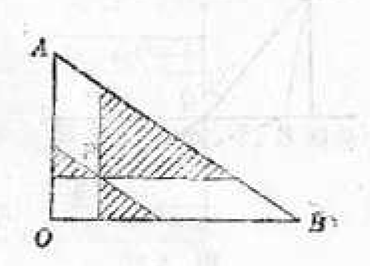


图　4

例16 如图4，在直角边为1的等腰直角三角形 AOB 中任取一点 P，过 P 分别引三边的平行线，与各边围成以 P 为顶点的三个三角形，求这三个三角形面积和的最小值，以及达到最小值时 P 的位置.

解 分别取 OB、OA 为 x 轴和 y 轴，则 AB 的方程为 $x+y=1$. 记 P 点坐标为 $P(x_P, y_P)$，则以 P 为公共顶点的三个三角形的面积和 S 为

$$S=\frac{1}{2}x_P^2+\frac{1}{2}y_P^2+\frac{1}{2}(1-x_P-y_P)^2,$$

$$2S=x_P^2+y_P^2+(1-x_P-y_P)^2.$$

由柯西不等式，得

$$[x_P^2+y_P^2+(1-x_P-y_P)^2]\cdot[1^2+1^2+1^2]$$
$$\geqslant[x_P+y_P+(1-x_P-y_P)]^2,$$

即
$$6S\geqslant 1.$$

当且仅当 $x_P/1=y_P/1=(1-x_P-y_P)/1$ 时，即 $x_P=y_P=\frac{1}{3}$ 时，

$$S_{\min}=\frac{1}{6}.$$

例17 如图5，光线由 A 点到 B 点，在介质面 l 折射，Q 为 l 上的一点，θ_1、θ_2 是光线经 Q 折射时的入射角和折射角，v_1、v_2 是光线在两种不同介质中的速度，且

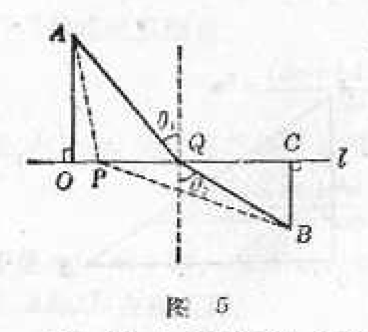


图 5

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2},$$

试求光线由 A 点到 B 点所需时间最少的路径.

解 过 A、B 分别作介质面 l 的垂线 AO、BC，设 $AO=$

a, $BC=b$, $OC=c$, $OQ=d$, 在 OC 上任取一点 P, 记 $OP=x$ $(0<x<c)$, 于是

$$\sin\theta_1=\frac{d}{\sqrt{d^2+a^2}},\quad \sin\theta_2=\frac{c-d}{\sqrt{(c-d)^2+b^2}}.$$

光线由 A 点经 P 到 B 点的所需时间 T_x 为

$$T_x=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}.$$

由柯西不等式, 得

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+a^2}&=\sqrt{x^2+a^2}\cdot\sqrt{\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1}\\&\geqslant x\sin\theta_1+a\cos\theta_1,\\\sqrt{(c-x)^2+b^2}&=\sqrt{(c-x)^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2}\\&\geqslant(c-x)\sin\theta_2+b\cos\theta_2.\end{aligned}$$

当且仅当

$$\frac{x}{\sin\theta_1}=\frac{a}{\cos\theta_1},\quad \frac{c-x}{\sin\theta_2}=\frac{b}{\cos\theta_2}\tag{7.15}$$

同时成立时上述两式中的等号同时成立. 于是将 $x=a\operatorname{tg}\theta_1$, $c-x=b\operatorname{tg}\theta_2$ 代入, 得

$$T_x\geqslant\frac{a}{v_1\cos\theta_1}+\frac{b}{v_2\cos\theta_2},$$

但 $$\cos\theta_1=\frac{a}{\sqrt{d^2+a^2}},\ \cos\theta_2=\frac{b}{\sqrt{(c-d)^2+b^2}},$$

$$\therefore\quad T_x\geqslant\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-d)^2+b^2}}{v_2}.$$

当且仅当(7.15)成立时取等号. 即当 $x=d$ 时, T_x 取到最小值

$$\min T_x=\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-d)^2+b^2}}{v_2}.$$

由此可知光线由 A 点经 Q 点到 B 点所需时间为最小.

例 17 就是著名的费马(Fermat)光行最速原理. 这个问题的提出，虽然已有三百多年了，但直到近代，有好几位数学家还认为用初等数学（即不用微积分）来证明它是很困难的. 这一原理在解数学题中也有着重要的应用.

例 18 海中有一岛 A, 距海岸 BC 的最近点 C 处 4km, 海岸有一 B 城, 距 C 点 6km, 渔民由岛 A 去 B 城, 已知他划船每小时 6km, 步行每小时 10km, 问他在何处登岸到达 B 城所需时间最短?

此题常用微积分法或判别式法求解, 但这两种方法都比较复杂, 而利用光行最速原理来解, 则比较简单.

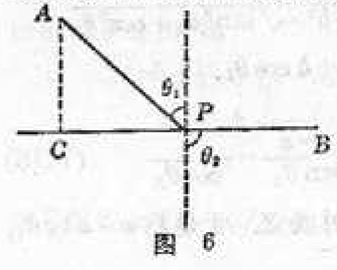


图 6

解 如图 6, 设 A、B 位于以平面分开的不同光介质中，且光在第一介质中的传播速度为 v_1, 在第二介质中的传播速度为 v_2, 则从 A 点发出的光线传到 B 所需要的时间为

$$T=\frac{AP}{v_1}+\frac{PB}{v_2}.$$

由光行最速原理知, 当且仅当 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$ 时, T 取最小值.

设渔民应在 P 处起岸, 令 $PC=x$, 则

$$AP=\sqrt{x^2+16},\ BP=6-x,$$

于是

$$T=\frac{\sqrt{x^2+16}}{6}+\frac{6-x}{10}. \qquad (7.16)$$

(7.16)式在 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{6}{10}$ 时, T 取最小值. 而 $\theta_2=90°$,

$$\therefore\quad \sin\theta_1=\frac{3}{5}.$$

又
$$\sin\theta_1=\frac{CP}{AP}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}},$$
即
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}=\frac{3}{5},$$
$$\therefore\quad x=3.$$

因此，划船起岸处 P 离 C 点 3 km，渔民从 A 岛到 B 城所需的时间最短.

例 19 由沿河的城市 A 运货到 B，B 离河岸最近点 C 为 30 km，C 和 A 的距离为 40 km. 如果每吨千米的运费水路比公路便宜一半，应该怎样从 B 筑一条公路到河岸，才能使 A 到 B 的运费最省？

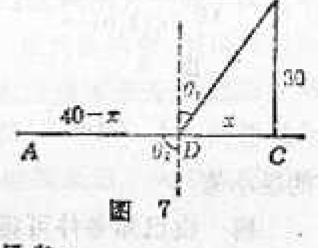


图 7

(1989 年第一期《数学通讯》第 19 页例 4)

解 设 $DC=x$，则
$$AD=40-x,\ BD=\sqrt{x^2+30^2}.$$
如果水路每吨千米运费为 1 个价格单位，则公路每吨千米运费为 2 个价格单位. 设每吨货物从 A 运到 B 的总运费为 y 个价格单位，则
$$y=1\times(40-x)+2\times\sqrt{x^2+900}=\frac{40-x}{1}+\frac{\sqrt{x^2+900}}{1/2}.$$
当 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{1}{2}$ 时，y 有最小值，而 $\theta_2=90°$，则
$$\sin\theta_1=\frac{1}{2}.$$
又易知
$$\sin\theta_1=\frac{x}{\sqrt{x^2+900}},$$
$$\therefore\quad\frac{x}{\sqrt{x^2+900}}=\frac{1}{2},$$

解之得 $$x=10\sqrt{3}\approx 17\,\text{km}.$$

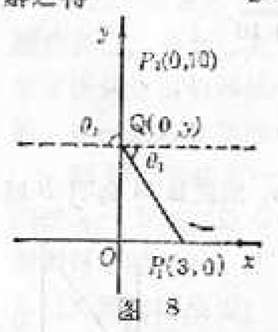


图 8

所以，公路应筑在 A、C 之间距 C 约 17 km 处的河岸上，才使运费最省.

例 20 设动点 $M(x,y)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 上运动，求函数

$$F(x,y)=\frac{15}{2}|x|+3|10-y|$$

的最小值.

解 由已知条件可得

$$|x|=\frac{2}{3}\sqrt{y^2+9},$$

故即为求 $$F(x,y)=5\sqrt{y^2+9}+3|10-y|$$
的最小值.

在直角坐标系中，设 P_1，P_2，Q 的坐标分别为 $(3,0)$，$(0,10)$，$(0,y)$，则可变为求

$$5|P_1Q|+3|QP_2|=\frac{|P_1Q|}{1/5}+\frac{|QP_2|}{1/3}$$

的最小值.

如图 8，由光行最速原理知，当 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{3}{5}$ 时，$5|P_1Q|+3|QP_2|$ 有最小值. 又

$$\sin\theta_1=\sin\angle OP_1Q=\frac{OQ}{P_1Q}=\frac{y}{\sqrt{y^2+3^2}},$$

即有 $$\frac{y}{\sqrt{y^2+9}}=\frac{3}{5},\quad \therefore\quad y=\frac{9}{4}.$$

$\therefore$ 当 $y=\frac{9}{4}$ 时，$F(x, y)=\frac{15}{2}|x|+3|10-y|$ 有最小值

$$5\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+9}+3\left|10-\frac{9}{4}\right|=\frac{75}{4}+\frac{93}{4}=42.$$

下列几题可供读者练习之用：

1．某乡 A 位于铁路线一边 m km 的地方．为了向城市 B 供应粮食，需要筹建一个火车站．乡里的粮食，先用汽车沿公路运到火车站，然后用火车经铁路运到城市去．已知乡 A 与城市 B，沿铁路方向的距离为 l km，汽车、火车的速度分别为每小时 u km、v km，欲使运粮时间最短，火车站应建在何处？

2．江的一岸有一发电站，要向下岸对岸一工厂区供电，输电路线先由发电站沿平直的江堤装设，然后转入水下通向工厂区．已知每单位距离的装设费，水下是陆上的 m 倍．试设计最经济的路线．

在本节的最后，我们利用柯西不等式来求形如 $y=\sin\theta(a+\cos\theta)$ 和形如 $y=\sin\theta(a-\cos\theta)$ $(a\neq0)$ 的极值问题．

定理1 设 $y=\sin\theta(a+\cos\theta)$ $(a\neq0)$，则

(1) 当 $a>0$，当且仅当 $\cos\theta=(\sqrt{a^2+8}-a)/4$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时，或当 $a<0$，当且仅当 $\cos\theta=(-\sqrt{a^2+8}-a)/4$，$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时，

$$y_{\max}=\left(\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2+4}{8}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+8a^2}+a^2+2}{2}}.$$

(2) 当 $a>0$，当且仅当 $\cos\theta=(\sqrt{a^2+8}-a)/4$，$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时，或当 $a<0$，当且仅当 $\cos\theta=(-\sqrt{a^2+8}-a)/$

4. $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时，

$$y_{\min}=-\left(\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2+4}{8}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+8a^2}+a^2+2}{2}}.$$

证明　考虑 $y^2=\sin^2\theta(a+\cos\theta)^2$，引入正数 λ，得

$$y^2=\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\theta(a\lambda+\lambda\cos\theta)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\sin^2\theta(\lambda^2+\cos^2\theta)(a^2+\lambda^2)\quad（据柯西不等式）\tag{7.17}$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\sin^2\theta+\lambda^2+\cos^2\theta}{2}\right)^2(a^2+\lambda^2)（由 A-G不等式）\tag{7.18}$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2+1}{2}\right)^2(a^2+\lambda^2).\tag{7.19}$$

(7.17)处等号当且仅当 $\frac{a}{\lambda}=\frac{\lambda}{\cos\theta}$，即 $\lambda^2=a\cos\theta$ 时成立；(7.18)处等号当且仅当 $\sin^2\theta=\lambda^2+\cos^2\theta$ 时成立。

故得

$$\begin{cases}\lambda^2=a\cos\theta, & (7.20)\\ \sin^2\theta=\lambda^2+\cos^2\theta. & (7.21)\end{cases}$$

由(7.20)、(7.21)消去 θ，可得 $2\lambda^4+a^2\lambda^2-a^2=0$，

解得
$$\lambda^2=\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2}{4},$$

将它代入(7.20)，得

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2}{4a}.\tag{7.22}$$

易知
$$|\cos\theta|=\frac{|a|\sqrt{a^2+8}-|a|^2}{4|a|}=\frac{\sqrt{a^2+8}-|a|}{4}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2+8}+|a|}<\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $\cos\theta$ 有意义．再由(7.19)及(7.32)可得结论．

定理 2　设 $y=\sin\theta(a-\cos\theta)\ (a\neq 0)$，则

(1) 当 $a>0$，当且仅当 $\cos\theta=(-\sqrt{a^2+8}+a)/4$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时，或 $a<0$，当且仅当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{a^2+8}+a}{4}$，$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时，

$$y_{max}=\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2+4}{8}\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+8a^2}+a^2+2}{2}}.$$

(2) 当 $a>0$，当且仅当 $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{a^2+8}+a}{4}$，$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时或 $a<0$，当且仅当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{a^2+8}+a}{4}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时，

$$y_{min}=-\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2+4}{8}\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+8a^2}+a^2+2}{2}}.$$

证明　$\because$　$y=\sin\theta(a-\cos\theta)=-\sin\theta(-a+\cos\theta)$，令 $y'=\sin\theta(-a+\cos\theta)$．利用定理 1 中(2)得：当 $a>0$ 即 $-a<0$，当且仅当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{a^2+8}+a}{4}$，$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 时

$$y'_{min}=-\left(\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2+4}{8}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+8a^2}+a^2+2}{2}},$$

即　$$y_{max}=\frac{\sqrt{a^4+8a^2}-a^2+4}{8}\sqrt{\frac{\sqrt{a^4+8a^2}+a^2+2}{2}}.$$

这就证明了定理 2 中(1)，同理可证(2)．

下面列举几例说明上述定理的应用．

例 21　(1) 求 $y=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)^2$ 的最大值；

(2) $\triangle ABC$ 中，求函数 $l=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$ 的最大值．

解　(1) $y=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)^3$

$$=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha(1-\cos\alpha)^2$$

$$=[\sin\alpha(1-\cos\alpha)]^2,$$

应用定理 2(取 $a=1$),当

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

时, $\sin\alpha(1-\cos\alpha)$有最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,当

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

时, $\sin\alpha(1-\cos\alpha)$有最小值 $\frac{-3\sqrt{3}}{4}$,故得

$$y_{\max}=\frac{27}{16}.$$

(2) $\sin 3A+\sin 3B=2\sin\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B)$,

不妨设 $A\leqslant B\leqslant C$. 显然 $A+B\leqslant\frac{2\pi}{3}$, 令

$$\alpha=\frac{3}{2}(A+B)\leqslant\pi,$$

即 $\sin\alpha\geqslant 0$. 又根据函数的有界性,有 $\cos\frac{3}{2}(A-B)\leqslant 1$ (其中等号当且仅当 $A=B$ 时成立). 于是 $\sin 3A+\sin 3B\leqslant 2\sin\alpha$, 其中等号当且仅当 $A=B$ 时成立.

另一方面　$\sin 3C=\sin 3(A+B)=\sin 2\alpha$,

$$\therefore\ l=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$$

$$\leqslant 2\sin\alpha+\sin 2\alpha=2\sin\alpha(1+\cos\alpha).$$

利用定理 1(取 $a=1$)得, 当 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,

即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时, $\sin\alpha(1+\cos\alpha)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 即

$$l_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

进一步可推得

$$\frac{3}{2}(A+B)=\frac{\pi}{3},$$

即

$$A+B=\frac{2\pi}{9},$$

$$\therefore\quad A=B=\frac{\pi}{9},\ C=\frac{7\pi}{9},\ l_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

例 22 已知 $4x^2+9y^2-32x-54y+109=0$, 求 $w=3x+11y-xy$ 的最大值和最小值.

解 条件等式可变形为

$$(x-4)^2/3^2+(y-3)^2/2^2=1.$$

故可令

$$\begin{cases} x=4+3\cos\theta, \\ y=3+2\sin\theta. \end{cases}$$

代入 $w=3x+11y-xy$, 得

$$\begin{aligned} w&=3(4+3\cos\theta)+11(3+2\sin\theta) \\ &\quad-(4+3\cos\theta)(3+2\sin\theta) \\ &=33+14\sin\theta-6\sin\theta\cos\theta \\ &=33+6\sin\theta\left(\frac{7}{3}-\cos\theta\right). \end{aligned}$$

利用定理 2 $\left(\text{取 } a=\frac{7}{3}\right)$, 得

当
$$\cos\theta=\frac{-\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2+8}+\frac{7}{3}}{4}=-\frac{1}{3},$$

$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，$\sin\theta\left(\dfrac{7}{3}-\cos\theta\right)$的最大值为$\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$，即得

$$w_{\max}=33+\frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

当 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$，$\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，

$$w_{\min}=33-\frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

例 29　在实数范围内解方程

$15\sqrt{15}x^4-288x^3+120\sqrt{15}x^2-640x+240\sqrt{15}=0.$

解　原方程可变形为

$$32x(-20-9x^2)=-15\sqrt{15}(4+x^2)^2,$$

进一步变形得

$$\frac{4x}{4+x^2}\left(-\frac{7}{2}+\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)=-\frac{15\sqrt{15}}{16}.$$

令 $x=2\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$，则得

$$\sin\theta\left(-\frac{7}{2}+\cos\theta\right)=-\frac{15\sqrt{15}}{16}. \tag{7.23}$$

令 $$y=\sin\theta\left(-\frac{7}{2}+\cos\theta\right),$$

利用定理 1，取 $a=-\dfrac{7}{2}$，得：

当且仅当

$$\cos\theta=\frac{-\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+8}-\left(-\frac{7}{2}\right)}{4}=-\frac{1}{4},$$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 时，$y_{\min}=-\dfrac{15\sqrt{15}}{16}$ 与方程(7.23)的右端相等.

故得原方程的实数解为

$$x=2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=2\times\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=2\times\frac{1+\frac{1}{4}}{\sqrt{15}/4}=\frac{2}{3}\sqrt{15}.$$

用综合除法可知 $x=\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$ 是二重根，其余两根为虚数根。

八、解几何问题

在这一节中，我们将讨论柯西不等式在解几何极值和几何不等式中的应用.

例1 在锐角$\triangle ABC$中，求出(并须加以证明)点P使$BL^2+CM^2+AN^2$达到极小，其中L, M, N分别是P到BC, CA, AB的垂足.

(1987年第28届IMO候选题)

解 记$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $BL=x$, $CM=y$, $AN=z$, 由勾股定理得

$$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=x^2+y^2+z^2,$$

即

$$ax+by+cz=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \qquad (8.1)$$

由柯西不等式，得

$$ax+by+cz\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (8.2)$$

由(8.1)和(8.2)，得

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2). \qquad (8.3)$$

(8.2)中等号成立的充要条件是存在$\lambda>0$使$x=\lambda a$, $y=\lambda b$, $z=\lambda c$. 把它们代入(8.1)得$\lambda=\frac{1}{2}$.

因此当且仅当$x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$, 即P为$\triangle ABC$的外心时，$x^2+y^2+z^2$达到最小值$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，a, b, c 分别为顶点 A, B, C 所对边的长，A, B, C 到内切圆的切线长分别为 u, v, w，求证：
$\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\geqslant\frac{3}{2}$.

(1989 年第 30 届 IMO 加拿大训练题)

证明 令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则由柯西不等式

$$2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9,$$

因此

$$\sum\frac{u}{a}=\sum\frac{p-a}{a}=\sum\frac{p}{a}-3\geqslant\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

例 3 过 $\triangle ABC$ 内一点 O 引三边的平行线 $DE /\!/ BC$，$FG /\!/ CA$，$HI /\!/ AB$，点 D、E、F、G、H、I 都在 $\triangle ABC$ 的边上．S_1 表示六边形 $DGHEFI$ 的面积，S_2 表示 $\triangle ABC$ 的面积．求证：$S_1\geqslant\frac{2}{3}S_2$.

(1990 年第 31 届 IMO 备选题)

证明 设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$IF=x$，$EH=y$，$GD=z$，则由于 OE，OH 分别与 BC，AB 平行，则

$$\triangle OEH\backsim\triangle BCA,$$

$$\frac{y}{b}=\frac{OE}{a}=\frac{CF}{a}.$$

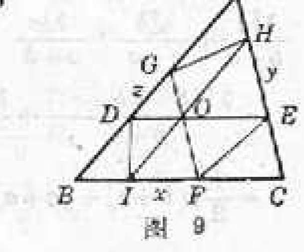
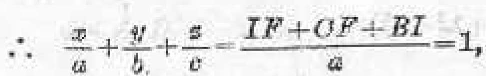


图 9

同理，
$$\frac{z}{c}=\frac{BI}{a}.$$



$$\therefore\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{IF+CF+BI}{a}=1,$$

由柯西不等式，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\cdot 1+\frac{y}{b}\cdot 1+\frac{z}{c}\cdot 1\right)^2=\frac{1}{3},$$

即
$$\frac{S_{OIF}+S_{OEH}+S_{OGD}}{S_2}\geqslant\frac{1}{3},$$

从而
$$S_{OHAG}+S_{ODBI}+S_{OFCE}\leqslant\frac{2}{3}S_2,$$

$$S_{AGH}+S_{DBI}+S_{EFC}\leqslant\frac{S_2}{3}.$$

所以
$$S\geqslant\frac{2}{3}S_2.$$

例 4　设 $a, b, c>0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3>0$ 且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 符合三角形边长的条件，则

$$\frac{\lambda_1^2 a}{b+c}+\frac{\lambda_2^2 b}{c+a}+\frac{\lambda_3^2 c}{a+b}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2).$$

当且仅当 $\dfrac{a}{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1}=\dfrac{b}{\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{c}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}$ 时等号成立.

证明　令 $S=a+b+c$, 根据柯西不等式

$$\frac{\lambda_1^2 a}{b+c}+\frac{\lambda_2^2 b}{c+a}+\frac{\lambda_3^2 c}{a+b}$$
$$=\frac{\lambda_1^2[S-(b+c)]}{b+c}+\frac{\lambda_2^2[S-(c+a)]}{c+a}+\frac{\lambda_3^2[S-(a+b)]}{a+b}$$
$$=\frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{\lambda_1^2}{b+c}+\frac{\lambda_2^2}{c+a}+\frac{\lambda_3^2}{a+b}\right)$$
$$-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2).$$

当且仅当 $\frac{b+c}{\lambda_1}=\frac{c+a}{\lambda_2}=\frac{a+b}{\lambda_3}$，即

$$\frac{a}{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1}=\frac{b}{\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2}=\frac{c}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}$$

时等号成立.

例 5 设正六边形 $A_1A_2\cdots A_6$ 的中心为 O. 连结点 O 与各顶点 $A_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 得六个正三角形 $\triangle_i$. 取 $\triangle_i$ 中任一点 $M_i(i=1, 2, \cdots, 6)$，记 D_i、d_i 为 M_i 到 $\triangle_i$ 周界上各点的最长、最短距离，试求变量 $\delta=\sum_{i=1}^{6} D_i^2/\sqrt[3]{\prod_{i=1}^{6} d_i}$ 的最小值.

解 如图 10，不妨令 $\triangle_1$ 为 $\triangle OA_1A_2$，则

$$D_1=\max\{M_1O,\ M_1A_1,\ M_1A_2\}, \tag{8.4}$$

$$d_1=\min\{M_1O',\ M_1A_1',\ M_1A_2'\}. \tag{8.5}$$

易知，在公共顶点 M_1 处的六个顶角中，至少有一个小于 $60°$. 不失一般性，令 $\angle O'M_1A_2\geqslant 60°$，

$\therefore\quad M_1A_2\cos\angle O'M_1A_2$

$\leqslant M_1A_2\cos 60°$，

$\therefore\quad M_1O'\leqslant\frac{1}{2}M_1A_2.\quad(8.6)$

图 10

综上(8.4)、(8.5)、(8.6)知

$$d_1\leqslant M_1O'\leqslant\frac{1}{2}M_1A_2\leqslant\frac{1}{2}D_1.$$

当且仅当 M_1 为正 $\triangle_1$ 的内心时，$d_1=\frac{1}{2}D_1$.

同理可得 $\qquad d_i\leqslant\frac{1}{2}D_i(i=2, 3, \cdots, 6).$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{6}D_i\geqslant 2\sum_{i=1}^{6}d_i,$$

$$\therefore\ \left(\sum_{i=1}^{6} D_i\right)^2 \geqslant 4\left(\sum_{i=1}^{6} d_i\right)^2.$$

再由柯西不等式，得

$$(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)\sum_{i=1}^{6} D_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{6} D_i\right)^2$$

$$\geqslant 4\times 36\sqrt[3]{\prod_{i=1}^{6} d_i},$$

$$\therefore\ \delta=\sum_{i=1}^{6} D_i^2 \Big/ \sqrt[3]{\prod_{i=1}^{6} d_i} \geqslant 24,$$

即 M_i 都为正 $\triangle_i$（$i=1, 2, \cdots, 6$）的内心时，$\delta_{\min}=24$.

例 6 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，D，E，F 分别为 P 到 BC、CA、AB 各边所引垂线的垂足，求所有使 $\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$ 为最小的 P 点.

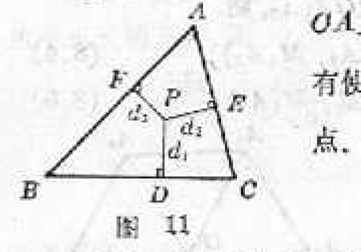


图 11

（1981 年第 22 届 IMO 试题）

解 记 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且 $PD=d_1$，$PE=d_2$，$PF=d_3$（图 11），则

$$\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right)(ad_1+bd_2+cd_3)$$

$$=\left(\frac{a^2}{ad_1}+\frac{b^2}{bd_2}+\frac{c^2}{cd_3}\right)(ad_1+bd_2+cd_3)$$

$$\geqslant\left(\frac{a}{\sqrt{ad_1}}\cdot\sqrt{ad_1}+\frac{b}{\sqrt{bd_2}}\cdot\sqrt{bd_2}+\frac{c}{\sqrt{cd_3}}\cdot\sqrt{cd_3}\right)^2$$

$$=(a+b+c)^2,$$

$$\therefore\ \frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ad_1+bd_2+cd_3}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}.$$

其中等号当且仅当

$$\frac{a^2}{ad_1}\Big/ad_1=\frac{b^2}{bd_2}\Big/bd_2=\frac{c^2}{cd_3}\Big/cd_3$$

$$\Rightarrow a^2/a^2d_1^2=b^2/b^2d_2^2=c^2/c^2d_3^2$$

$$\Rightarrow d_1=d_2=d_3$$

时成立．即当P为$\triangle ABC$的内心时，$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}$有极小值$\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$．

由以上证明，归结出如下命题：

命题 1　P为$\triangle ABC$内一点，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，点P到$\triangle ABC$三边BC，CA，AB的距离分别为d_1，d_2，d_3，当P为$\triangle ABC$的内心时，$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}$达到最小值，其最小值为$\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$．

命题 1 在空间可以推广如下：

命题 2　P为四面体A-BCD内一点，P到面BCD，ABD，ACD，ABC的距离分别为d_1，d_2，d_3，d_4，设$\triangle BCD$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$，$\triangle ABC$的面积分别为S_1，S_2，S_3，S_4．当P为四面体A-BCD的内切球的球心时，$\frac{S_1}{d_1}+\frac{S_2}{d_2}+\frac{S_3}{d_3}+\frac{S_4}{d_4}$达到最小，最小值为$\frac{(S_1+S_2+S_3+S_4)^2}{3V}$，其中$V$为四面体的体积．

证明　（由读者自己完成．）

这个命题还可以进一步推广为：

命题 3　P为n面体内切球内的一点，它的各面的面积分别为S_1，S_2，$\cdots$，S_n．P到相应面的距离为d_1，d_2，$\cdots$，d_n，则当P为此多面体的内切球的球心时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{S_i}{d_i}$达到最小，其

最小值为$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}S_i\right)^2\Big/3V$（$V$为$n$面体的体积）.

证明　在柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2$$

中，令$x_i^2=\dfrac{a_i^2}{b_i}$，$y_i^2=b_i$（$b_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$），

得
$$\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

于是
$$\left(\sum_{i=1}^{n}S_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i^2}{S_id_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}S_i\right)^2,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{d_i}\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}S_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}S_id_i}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}S_i\right)^2}{3V}.$$

当$d_1=d_2=\cdots=d_n$时，即P为这n面体内切球的球心时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{S_i}{d_i}$达到最小，最小值为$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}S_i\right)^2\Big/3V$.

例7　已知一个四面体四个面的面积都相等，求证：隶属于各棱的二面角其余弦的平方和不小于$\dfrac{2}{3}$.

证明　设四面体$ABCD$的各顶点A，B，C，D其相对面面积分别记为S_A，S_B，S_C，S_D；隶属于各棱AB，AC，AD，BC，BD，DC的二面角的余弦分别记为$\cos\overline{AB}$，$\cos\overline{AC}$，$\cos\overline{AD}$，$\cos\overline{BC}$，$\cos\overline{BD}$，$\cos\overline{DC}$.

我们先证明一个预备命题：

$$\cos\overline{AB}+\cos\overline{AC}+\cos\overline{AD}+\cos\overline{BC}+\cos\overline{BD}+\cos\overline{DC}=2. \tag{8.7}$$

事实上，我们知道，当面积为S的平面α_1和平面α_2夹角为α时，S在平面α_2上的射影面积$S'=S\cos\alpha$．应用此公

式，容易证明：

$$\left.\begin{aligned}S_A&=S_B\cos\overline{DC}+S_C\cos\overline{BD}+S_D\cos\overline{BC},\\ S_B&=S_C\cos\overline{AD}+S_D\cos\overline{AC}+S_A\cos\overline{DC},\\ S_C&=S_D\cos\overline{AB}+S_A\cos\overline{BD}+S_B\cos\overline{AD},\\ S_D&=S_A\cos\overline{BC}+S_B\cos\overline{AC}+S_C\cos\overline{AB}.\end{aligned}\right\}\qquad(8.8)$$

注意到 $S_A=S_B=S_C=S_D$，上述四个等式相加，立即可以证明(8.7)。

由柯西不等式和(8.7)得

$$2^2\leqslant(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(\cos^2\overline{AB}+\cos^2\overline{AC}+\cos^2\overline{AD}+\cos^2\overline{BC}+\cos^2\overline{BD}+\cos^2\overline{DC}),$$

即

$$\cos^2\overline{AB}+\cos^2\overline{AC}+\cos^2\overline{AD}+\cos^2\overline{BC}+\cos^2\overline{BD}+\cos^2\overline{DC}\geqslant\frac{2}{3}.$$

其中等号当且仅当 $S_A=S_B=S_C=S_D$，且 $\cos\overline{AB}=\cos\overline{AC}=\cos\overline{AD}=\cos\overline{BC}=\cos\overline{BD}=\cos\overline{DC}$ 时成立。

例 7 中的条件“四个面的面积都相等”是多余的。

对(8.8)式及柯西不等式，得

$$S_A^2\leqslant(S_B^2+S_C^2+S_D^2)(\cos^2\overline{DC}+\cos^2\overline{BD}+\cos^2\overline{BC}),$$

$$S_B^2\leqslant(S_C^2+S_D^2+S_A^2)(\cos^2\overline{AD}+\cos^2\overline{AC}+\cos^2\overline{DC}),$$

$$S_C^2\leqslant(S_D^2+S_A^2+S_B^2)(\cos^2\overline{AB}+\cos^2\overline{BD}+\cos^2\overline{AD}),$$

$$S_D^2\leqslant(S_A^2+S_B^2+S_C^2)(\cos^2\overline{BC}+\cos^2\overline{AC}+\cos^2\overline{AB}),$$

$$\therefore\quad 2(\cos^2\overline{DC}+\cos^2\overline{BD}+\cos^2\overline{BC}+\cos^2\overline{AD})$$

$$\geqslant\frac{S_A^2}{S_B^2+S_C^2+S_D^2}+\frac{S_B^2}{S_C^2+S_D^2+S_A^2}+\frac{S_C^2}{S_D^2+S_A^2+S_B^2}+\frac{S_D^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2}.\qquad(8.9)$$

记 $x_1=S_A^2$, $x_2=S_B^2$, $x_3=S_C^2$, $x_4=S_D^2$, 不妨设 $x_1+x_2+x_3$

$+x_4=1$，则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{1-x_i}=\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}x_i^k=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}x_i^k$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}4^{1-k}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}4^{1-k}=\frac{4}{3},$$

$$\therefore\quad \cos^2\overline{AB}+\cos^2\overline{AC}+\cos^2\overline{AD}+\cos^2\overline{BC}$$

$$+\cos^2\overline{BD}+\cos^2\overline{DC}\geqslant\frac{2}{3}.$$

在证得(8.9)式后，也可以利用切比雪夫不等式来证明。不妨设 $S_A^2\geqslant S_B^2\geqslant S_C^2\geqslant S_D^2$，则

$$S_A^2+S_B^2+S_C^2\geqslant S_A^2+S_B^2+S_D^2\geqslant S_A^2+S_C^2+S_D^2$$

$$\geqslant S_B^2+S_C^2+S_D^2,$$

$$\frac{S_D^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2}\leqslant\frac{S_C^2}{S_A^2+S_B^2+S_D^2}\leqslant\frac{S_B^2}{S_A^2+S_C^2+S_D^2}$$

$$\leqslant\frac{S_A^2}{S_B^2+S_C^2+S_D^2},$$

则

$$[(S_A^2+S_B^2+S_C^2)+(S_B^2+S_C^2+S_D^2)+(S_A^2+S_C^2+S_D^2)$$

$$+(S_B^2+S_C^2+S_D^2)]\cdot\left(\frac{S_D^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2}+\frac{S_C^2}{S_A^2+S_B^2+S_D^2}\right.$$

$$\left.+\frac{S_B^2}{S_A^2+S_C^2+S_D^2}+\frac{S_A^2}{S_B^2+S_C^2+S_D^2}\right)$$

$$\geqslant 4(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2),$$

即

$$\frac{S_D^2}{S_A^2+S_B^2+S_C^2}+\frac{S_C^2}{S_A^2+S_B^2+S_D^2}+\frac{S_B^2}{S_A^2+S_C^2+S_D^2}$$

$$+\frac{S_A^2}{S_B^2+S_C^2+S_D^2}\geqslant\frac{4}{3}. \tag{8.10}$$

由(8.9)及(8.10)两式即得所证结论。

由以上各式知，等号当且仅当 $S_A=S_B=S_C=S_D$ 且 $\cos\overline{AB}=\cos\overline{AC}=\cos\overline{AD}=\cos\overline{BC}=\cos\overline{BD}=\cos\overline{CD}$ 时成立。

例8 如图12，在梯形 $ABCD$ 的下底 AB 上有两定点 M、N，上底 CD 上有一动点 P。记 $E=DN\cap AP$，$F=DN\cap MC$，$G=MC\cap PB$，$DP=\lambda DC$。问当 λ 为何值时，四边形 $PEFG$ 的面积最大？

（1988年中国国家队集训班选拔赛试题）

图 12

解 $\because$ $S_{PEFG}=S_{ABP}-S_{ANE}-S_{MBG}+S_{MNF}$，

而其中 S_{ABP} 与 S_{MNF} 为定值，所以 S_{PEFG} 最大，当且仅当 $S_{ANE}+S_{MBG}$ 取最小值。

记 $AB=a$，$CD=b$，$MN=c$，设 $AN=\mu(a+c)$，于是 $MB=(1-\mu)(a+c)$。设梯形的高为1，容易看出

$$S_{ANE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AN^2}{AN+DP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu^2(a+c)^2}{\mu(a+c)+\lambda b},$$

$$S_{MBG}=\frac{1}{2}\cdot\frac{MB^2}{MB+PC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\mu)^2(a+c)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b},$$

从而有

$$S_{ANE}+S_{MBG}=\frac{1}{2}(a+c)^2\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}\right].\quad(8.11)$$

由柯西不等式，得

$$\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}$$

$$=\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}\right]$$

$$\cdot[\mu(a+c)+\lambda b+(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b]$$

$$\cdot\frac{1}{a+b+c}\geqslant(\mu+1-\mu)\frac{1}{a+b+c}$$

$$=\frac{1}{a+b+c}. \tag{8.12}$$

将(8.11)与(8.12)结合起来，即得

$$S_{ASB}+S_{MNG}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+c)^2}{a+b+c}\quad(\text{定值})$$

其中等号成立当且仅当(8.12)中等号成立，而这又相当于

$$\frac{\mu}{\mu(a+c)+\lambda b}=\frac{1-\mu}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b},$$

由此解得 $\lambda=\mu$，即当 $\lambda=\mu=AN/(AB+MN)$ 时，S_{PEFG} 取最大值.

例9 设 t_a, t_b, t_c 分别为 $\triangle ABC$ 的边 a, b, c 上的内角平分线长，求证：

$$(t_a+t_b+t_c)^2\leqslant\frac{9}{4}(ab+bc+ca), \tag{8.13}$$

其中等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

证明 由内角平分线长的公式知

$$t_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

利用柯西不等式，得

$$2\sqrt{bc}=\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$$

$$\leqslant[(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]^{\frac{1}{2}}[(\sqrt{c})^2+(\sqrt{b})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=b+c.$$

其中等号当且仅当 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$，即 $b=c$ 时成立.

所以$t_a\leqslant\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$.

同理可得$t_b\leqslant\sqrt{ca}\cos\frac{B}{2}$，$t_c\leqslant\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}$，

由此可得

$$(t_a+t_b+t_c)^2\leqslant\left(\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}+\sqrt{ca}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}\right)^2.$$

其中等号当且仅当$a=b=c$即$\triangle ABC$为正三角形时成立.

对上式右端再次运用柯西不等式，得

$$\left(\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}+\sqrt{ca}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\leqslant(ab+bc+ca)\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right),$$

但 $$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

而 $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

故有

$$(t_a+t_b+t_c)^2\leqslant\frac{9}{4}(ab+bc+ac).\tag{8.14}$$

显然，(8.14)中等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立.

由于 $(t_a+t_b+t_c)^2\geqslant3(t_at_b+t_bt_c+t_ct_a)$

及$(a+b+c)^2\geqslant3(ab+bc+ca)$，因而又可得

$$t_a+t_b+t_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c),\tag{8.15}$$

$$t_at_b+t_bt_c+t_ct_a\leqslant\frac{3}{4}(ab+bc+ca).\tag{8.16}$$

例10 若a, b, c, R, r与a', b', c', R', r'分别表示$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三边、外接圆半径及内切圆半径，求证：$36rr'\leqslant aa'+bb'+cc'\leqslant9RR'$，当且仅当$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$都是正三角形时取等号.

证明 由柯西不等式及正弦定理得

$$(aa'+bb'+cc')^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$$

$$=16R^2R'^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$

$$\cdot(\sin^2 A'+\sin^2 B'+\sin^2 C')$$

$$=16R^2R'^2(2+2\cos A\cos B\cos C)$$

$$\cdot(2+2\cos A'\cos B'\cos C').$$

$$\because \quad \cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8},$$

$$\cos A'\cos B'\cos C' \leqslant \frac{1}{8},$$

$$\therefore \quad aa'+bb'+cc' \leqslant 9RR'.$$

又由不等式 $x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$, 知

$$aa'+bb'+cc' \geqslant 3\sqrt[3]{abc\cdot a'b'c'}.$$

$$\because \quad abc=r^3 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}, \tag{8.17}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}},$$

$$\therefore \quad \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}. \tag{8.18}$$

又

$$\because \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]^2$$

$$+\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}, \tag{8.19}$$

由(8.17)、(8.18)、(8.19)，得

$$abc \geqslant 24\sqrt{3}r^3 \quad 或 \quad a'b'c' \geqslant 24\sqrt{3}r'^3, \qquad (8.20)$$

$$\therefore \quad aa'+bb'+cc' \geqslant 36rr'.$$

故 $36rr' \leqslant aa'+bb'+cc' \leqslant 9RR'$ 成立. 显然 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 都是正三角形是不等式取等号的充分与必要条件.

例 11 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三条中线长分别为 m_a, m_b, m_c 与 m'_a, m'_b, m'_c，它们的外接圆半径、内切圆半径分别为 R, r 与 R', r'. 求证:

$$\frac{1}{3rr'} \geqslant \frac{1}{m_a m'_a} + \frac{1}{m_b m'_b} + \frac{1}{m_c m'_c} \geqslant \frac{4}{3RR'}.$$

其中等号均当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 为正三角形时成立.

证明 先证

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{3r^2}. \qquad (8.21)$$

由 Jovanoric 不等式

$$m_a^2 \geqslant s(s-a) \qquad (8.22)$$

及代数不等式

$$\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{x+y+z}{3xyz}$$

得

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{s(s-a)} + \frac{1}{s(s-b)} + \frac{1}{s(s-c)}$$

$$\leqslant \frac{s}{3(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{3r^2} \qquad (8.23)$$

由柯西不等式，得

$$\frac{1}{3rr'} \geqslant \left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{m_a'^2}+\frac{1}{m_b'^2}+\frac{1}{m_c'^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant \frac{1}{m_a m_a'}+\frac{1}{m_b m_b'}+\frac{1}{m_c m_c'}. \qquad (8.24)$$

另外，由 Neuberg 不等式

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2 \qquad (8.25)$$

及恒等式 $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$，得

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2 \leqslant \frac{27}{4}R^2, \qquad (8.26)$$

再由代数不等式，得

$$\frac{1}{m_a m_a'}+\frac{1}{m_b m_b'}+\frac{1}{m_c m_c'}$$

$$\geqslant \frac{9}{m_a m_a'+m_b m_b'+m_c m_c'}$$

$$\geqslant \frac{9}{(m_a^2+m_b^2+m_c^2)^{\frac{1}{2}}(m_a'^2+m_b'^2+m_c'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geqslant \frac{4}{3RR'}. \qquad (8.27)$$

易知不等式(8.21)和(8.26)中，等号成立均当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，所以原式中等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 都为正三角形.

图 13

例 12 已知凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内有一点 P，使得

$$\angle PA_1A_2=\angle PA_2A_3=\cdots=\angle PA_nA_1=\theta_n \quad (n\geqslant 3),$$

求证：$\theta_n \leqslant \frac{n-2}{2n}\pi$，并指出等号成立的充要条件.

证明 如图13，设凸 n 边形的边长为 a_1，a_2，…，a_n，其面积为 S_n，

$$PA_i=x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

在 $\triangle PA_iA_{i+1}$ 中，由余弦定理得

$$x_{i+1}^2=x_i^2+a_i^2-2x_ia_i\cos\theta_n,$$

$$\text{又} \because \quad 2S_{\triangle PA_iA_{i+1}}=x_ia_i\sin\theta_n,$$

$$\therefore \quad x_{i+1}^2=x_i^2+a_i^2-4S_{\triangle PA_iA_{i+1}}\operatorname{ctg}\theta_n,$$

其中 $i=1, 2, \cdots, n$，$x_{n+1}=x_1$，$A_{n+1}=A_1$.

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^n x_{i+1}^2=\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i=1}^n a_i^2-4\operatorname{ctg}\theta_n\sum_{i=1}^n S_{\triangle PA_iA_{i+1}},$$

$$\therefore \quad \operatorname{ctg}\theta_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}{4S_n}.$$

又由著名的等周定理知，周长一定的 n 边形中以正 n 边形的面积最大，即有

$$S_n\leqslant\frac{1}{4}n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i}{n}\right)^2,$$

即
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\geqslant 4n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\cdot S_n.$$

又由柯西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^n a_i^2,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^n a_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\geqslant 4S_n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

$$\therefore \quad \operatorname{ctg}\theta_n\geqslant\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right),$$

即
$$\theta_n\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}=\frac{n-2}{2n}\cdot\pi.$$

由等周定理和柯西不等式知，等号当且仅当凸 n 边形为

正 n 边形时成立.

例 13 若 a,b,c 为某三角形的三条边长, $2s=a+b+c$, 则

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1}. \quad (n\geqslant1)$$

(1987 年第 28 届 IMO 备选题)

证明 为书写方便, 记

$$\sum\frac{b+c}{a+b+c}=\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c},$$

$$\sum\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},$$

$$\sum\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}.$$

其他情况类似.

(1) 当 $n=1$ 时, 由柯西不等式得

$$\sum\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\sum\frac{a+b+c}{b+c}\geqslant9,$$

由于 $\sum\frac{b+c}{a+b+c}=2$, 故 $\sum\frac{a+b+c}{b+c}\geqslant\frac{9}{2}$, $\sum\frac{a}{b+c}\geqslant\frac{3}{2}$. 因此当 $n=1$ 时, 欲证不等式成立.

(2) 当 $n>1$ 时, 原不等式变为

$$\frac{2(a+b+c)a^n}{(b+c)(a+b+c)^n}+\frac{2(a+b+c)b^n}{(c+a)(a+b+c)^n}$$

$$+\frac{2(a+b+c)c^n}{(a+b)(a+b+c)^n}\geqslant\frac{1}{3^{n-2}},$$

即
$$\sum\frac{2(a+b+c)}{b+c}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^n\geqslant\frac{1}{3^{n-2}}.$$

由柯西不等式得

$$\sum\frac{2(a+b+c)}{b+c}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^n$$

$$=\sum\frac{b+c}{2(a+b+c)}\cdot\sum\frac{2(a+b+c)}{b+c}\cdot\frac{a}{a+b+c}$$

$$\geqslant\left[\sum\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2,$$

再由 $\frac{n}{2}$ 次幂平均不小于算术平均得

$$\left[\sum\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2\geqslant\left[3\left(\frac{\sum\frac{a}{a+b+c}}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{3^{n-2}},$$

故原不等式获证.

例 14 设 h_a, h_b, h_c 及 h'_a, h'_b, h'_c 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三边 a, b, c 及 a', b', c' 对应的高,

求证: $h_ah'_a+h_bh'_b+h_ch'_c\leqslant\frac{3}{4}(aa'+bb'+cc')$.

证明 由熟知的不等式 $\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$, 得

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{9}{4}.$$

同理, 得 $$\sin^2 A'+\sin^2 B'+\sin^2 C'\leqslant\frac{9}{4}.$$

由柯西不等式, 得

$$\begin{aligned}&\sin A\sin A'+\sin B\sin B'+\sin C\sin C'\\&\quad\leqslant[(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)(\sin^2 A'+\sin^2 B'\\&\qquad+\sin^2 C')]^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{4}.\end{aligned}\tag{8.28}$$

又

$$\begin{aligned}&\sin A\sin A'\sin B\sin B'+\sin B\sin B'\sin C\sin C'\\&\qquad+\sin C\sin C'\sin A\sin A'\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{3}(\sin A\sin A' + \sin B\sin B' + \sin C\sin C')^2,$$

由(8.28)得

$$\sin A\sin A'\sin B\sin B' + \sin B\sin B'\sin C\sin C' + \sin C\sin C'\sin A\sin A'$$
$$\le \frac{3}{4}(\sin A\sin A' + \sin B\sin B' + \sin C\sin C'). \tag{8.29}$$

(8.29)式乘以$4RR'$得

$$h_a h_a' + h_b h_b' + h_c h_c' \le \frac{3}{4}(aa' + bb' + cc').$$

例 15 a, b, c 与 a', b', c' 分别表示$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三边长；s、R、r 与 s'、R'、r' 分别表示它们的周长之半，外接圆半径与内切圆半径，求证：

$$\frac{1}{RR'} \le \frac{27}{4ss'} \le \frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'} \le \frac{1}{4rr'},$$

其中所有的等号当且仅当$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$均为正三角形时成立。

证明 $\because\ (s-b)(s-c) \le \left(\dfrac{s-b+s-c}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4},$

$$\therefore\ h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \le \sqrt{s(s-a)},$$

h_a 表示$\triangle ABC$边BC上高的长.

同理 $\quad h_b \le \sqrt{s(s-b)},\ h_c \le \sqrt{s(s-c)}.$

$$\therefore\ h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \le s(s-a+s-b+s-c) = s^2.$$

两边同除以$4\Delta^2$（Δ表示$\triangle ABC$的面积），得

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}. \tag{8.30}$$

同理

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}\leqslant\frac{1}{4r'^2}. \tag{8.31}$$

利用柯西不等式,得

$$\left(\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}\right),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}\leqslant\frac{1}{4rr'}. \tag{8.32}$$

$$\because\quad 2s=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \tag{8.33}$$

$$2s'=a'+b'+c'\geqslant 3\sqrt[3]{a'b'c'}, \tag{8.34}$$

$$\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abca'b'c'}}. \tag{8.35}$$

三式相乘得 $\quad 4ss'\left(\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}\right)\geqslant 27,$

$$\therefore\quad \frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}\geqslant\frac{27}{4ss'}. \tag{8.36}$$

$$\because\quad s=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}R,$$

$$s'\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}R',$$

$$\therefore\quad \frac{27}{4ss'}\geqslant\frac{27}{4}\cdot\frac{4}{27RR'}=\frac{1}{RR'}. \tag{8.37}$$

由(8.32)、(8.36)、(8.37),得

$$\frac{1}{RR'}\leqslant\frac{27}{4ss'}\leqslant\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}\leqslant\frac{1}{4rr'},$$

同时显见式中的所有等号当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 均为正三角形时成立.

由上面的不等式可导出另一关于两个三角形的不等式

$$ss'\geqslant h_ah_a'+h_bh_b'+h_ch_c'\geqslant 27rr'. \tag{8.38}$$

例16　A, B, C 为任意三角形的三个内角，且 n 为自然数，求证：

$$\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}\geqslant\frac{3^{n+1}}{\pi^n}.$$

证明　上式可改为证

$$\left(\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}\right)\cdot\pi^n\geqslant 3^{n+1}$$

或

$$\left(\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}\right)(A+B+C)^n\geqslant 3^{n+1}. \qquad (8.39)$$

而由熟知性质"若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 均为非负数时，则有 $\sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}{m}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$"得

$$\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}}{3}}\geqslant\frac{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}{3},$$

即

$$\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}\geqslant 3\left(\frac{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}{3}\right)^n.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\left(\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}\right)(A+B+C)^n\\ &\geqslant 3\left(\frac{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}{3}\right)^n\cdot(A+B+C)^n\\ &=\frac{1}{3^{n-1}}\left[\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)(A+B+C)\right]^n. \qquad (8.40)\end{aligned}$$

由柯西不等式，可知

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)(A+B+C)\\ &\geqslant\left(\frac{1}{A}\cdot A+\frac{1}{B}\cdot B+\frac{1}{C}\cdot C\right)^2=9.\end{aligned}$$

代入(8.40)式得

$$\left(\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}\right)(A+B+C)^n \geqslant \frac{1}{3^{n-1}}\cdot 9^n$$

$$=3^{n+1},$$

此即为(8.39)式，因此进而可得

$$\frac{1}{A^n}+\frac{1}{B^n}+\frac{1}{C^n}\geqslant\frac{3^{n+1}}{\pi^n}.$$

相应地，对凸 m 边形 $A_1A_2\cdots A_m$ 可以得到一系列有趣的不等式：

(1) $\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_m}\geqslant\frac{m^2}{(m-2)\pi}$；

(2) $\frac{1}{A_1^2}+\frac{1}{A_2^2}+\cdots+\frac{1}{A_m^2}\geqslant\frac{m^3}{(m-2)^2\pi^2}$.

证明 $\because$ $A_1+A_2+\cdots+A_m=(m-2)\pi$,

应用柯西不等式，得

(1) $\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_m}$

$$=\frac{1}{(m-2)\pi}(A_1+A_2+\cdots+A_m)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_m}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{(m-2)\pi}(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{个}})^2=\frac{m^2}{(m-2)\pi}.$$

(2) $\frac{1}{A_1^2}+\frac{1}{A_2^2}+\cdots+\frac{1}{A_m^2}$

$$=\left(\underbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}}_{m\text{个}}\right)\left(\frac{1}{A_1^2}+\frac{1}{A_2^2}+\cdots+\frac{1}{A_m^2}\right)$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{A_1}+\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{A_m}\right)^2$$

$$=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_m}\right)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{m}\left[\frac{m^2}{(m-2)\pi}\right]^2=\frac{m^3}{(m-2)^2\pi^2}.$$

这个不等式还可以进一步推广为

$$\frac{1}{A_1^n}+\frac{1}{A_2^n}+\cdots+\frac{1}{A_m^n}\geqslant\frac{m^{n+1}}{(m-2)^n\pi^n}.$$

利用柯西不式等的推广式(参见本书第十一节)，易得

$$m^{n-1}\left(\frac{1}{A_1^n}+\frac{1}{A_2^n}+\cdots+\frac{1}{A_m^n}\right)$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_m}\right)^n.$$

由柯西不等式得

$$(A_1+A_2+\cdots+A_m)^n\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\cdots+\frac{1}{A_m}\right)^n\geqslant m^{2n},$$

两式相乘即得

$$\left(\frac{1}{A_1^n}+\frac{1}{A_2^n}+\cdots+\frac{1}{A_m^n}\right)(A_1+A_2+\cdots+A_m)^n$$

$$\geqslant m^{n+1}.$$

$$\because\quad (A_1+A_2+\cdots+A_m)^n=(m-2)^n\pi^n,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{A_1^n}+\frac{1}{A_2^n}+\cdots+\frac{1}{A_m^n}\geqslant\frac{m^{n+1}}{(m-2)^n\pi^n}.$$

同理可证:

设 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 为凸 m 边形的 m 个外角，则

$$\frac{1}{B_1^n}+\frac{1}{B_2^n}+\cdots+\frac{1}{B_m^n}\geqslant\frac{m^{n+1}}{(2\pi)^n}.$$

例 17 对任一 $\triangle ABC$，有

$$3\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\leqslant\sqrt{\frac{4R}{r}+1},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，等式成立。

证明　由三角形面积的关系及

$$r_a=\frac{rp}{p-a},\quad r_b=\frac{rp}{p-b},\quad r_c=\frac{rp}{p-c},$$

$$S^2=(rp)^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

得

$$r_a+r_b+r_c=S\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$$

$$=4R+r, \tag{8.41}$$

$$r_ar_br_c=S^3[(p-a)(p-b)(p-c)]^{-1}=pS, \tag{8.42}$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2S}(a+b+c)=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}, \tag{8.43}$$

$$h_ah_bh_c=\frac{8S^3}{abc}=\frac{2S^2}{R}. \tag{8.44}$$

利用柯西不等式和(8.41)、(8.43)式，有

$$\left(\sqrt{r_a}\cdot\sqrt{\frac{1}{h_a}}+\sqrt{r_b}\cdot\sqrt{\frac{1}{h_b}}+\sqrt{r_c}\cdot\sqrt{\frac{1}{h_c}}\right)^2$$

$$\leqslant(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

$$=(4R+r)\cdot\frac{1}{r}=\frac{4R}{r}+1.$$

两边开方即得所证不等式的右半部分．又由算术-几何平均值不等式及(8.42)、(8.44)式，得

$$\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\geqslant3\left(\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}\right)^{\frac{1}{6}}=3\left(\frac{R}{2r}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，$r_a=r_b=r_c=h_a=h_b=h_c=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，$R=2r$，等式成立，且和为 3.

例 18　对任一 $\triangle ABC$，有

$$at_A+bt_B+ct_C\leqslant\frac{9\sqrt{6}R}{4}\sqrt{3R^2-4r^2},$$

其中 t_A, t_B, t_C 分别为角 A, B, C 的平分线长；当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

证明 利用角平分线性质及余弦定理，有

$$t_A^2=b^2+\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2-\frac{2ab^2}{b+c}\cos C$$

$$=b^2+\frac{a^2b^2}{(b+c)^2}-\frac{b}{b+c}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$

$$t_B^2=\frac{4cap(p-b)}{(c+a)^2},\quad t_C^2=\frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}.$$

由此得

$$t_A=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$t_B=\frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)},$$

$$t_C=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

利用算术-几何平均值不等式，得

$$t_A\leqslant\sqrt{p(p-a)},\quad t_B\leqslant\sqrt{p(p-b)},$$

$$t_C\leqslant\sqrt{p(p-c)},$$

由上式及柯西不等式，并利用

$$a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr),$$

$$p\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}R,\quad R\geqslant 2r,$$

得

$$(at_A+bt_B+ct_C)^2$$

$$\leqslant[a\sqrt{p(p-a)}+b\sqrt{p(p-b)}+c\sqrt{p(p-c)}]^2$$

$$\leqslant(a^2+b^2+c^2)[p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)]$$

$$=(a^2+b^2+c^2)[3p^2-(a+b+c)p]$$

$$=2p^2(p^2-r^2-4Rr)$$

$$\leqslant \frac{27}{2} R^2\left(\frac{27}{4} R^2 - r^2 - 8r^2\right)$$

$$= \frac{243}{8} R^2(3R^2 - 4r^2).$$

两边开平方即得所证不等式．当且仅当 $a=b=c$ 时，$t_A=t_B=t_C=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，$R=2r=\frac{\sqrt{3}a}{3}$，等号成立，其和为 $\frac{3\sqrt{3}a}{3}$．

例 19 若以 $K(x, y, z)$ 记边长分别为 x, y, z 的三角形的面积，求证对于任意两个边长分别为 a, b, c 以及 a', b', c' 的三角形来说，有不等式

$$\sqrt{K(a, b, c)}+\sqrt{K(a', b', c')} \leqslant \sqrt{K(a+a', b+b', c+c')}; \tag{8.45}$$

并确定式中等号成立的条件．（第 43 届普特南数学竞赛题）

证明 令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$t=s-a$，$u=s-b$，$v=s-c$；$s'=\frac{1}{2}(a'+b'+c')$，$t'=s'-a'$，$u'=s'-b'$，$v'=s'-c'$，利用海伦公式，则不等式(8.45)变为

$$\sqrt{stuv}+\sqrt{s't'u'v'} \leqslant \sqrt{(s+s')(t+t')(u+u')(v+v')}. \tag{8.46}$$

注意到对于任意正数 x, y, x', y'，应用柯西不等式可得

$$\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'} \leqslant \sqrt{(x+x')(y+y')}, \tag{8.47}$$

且式中等号成立的充要条件为 $\sqrt{x}:\sqrt{x'}=\sqrt{y}:\sqrt{y'}$，亦即 $x:x'=y:y'$．现在取 $x=\sqrt{st}$，$y=\sqrt{uv}$，$x'=\sqrt{s't'}$，$y'=\sqrt{u'v'}$，代入不等式(8.47)，得

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'} \leqslant \sqrt{(\sqrt{st}+\sqrt{s't'})(\sqrt{uv}+\sqrt{u'v'})}. \tag{8.48}$$

对于不等式(8.48)的右端再次应用不等式(8.47)便得

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}$$
$$\leqslant\sqrt{(\sqrt{st}+\sqrt{s't'})(\sqrt{uv}+\sqrt{u'v'})}$$
$$\leqslant\sqrt[4]{(s+s')(t+t')(u+u')(v+v')},$$

于是

$$\sqrt{stuv}+\sqrt{s't'u'v'}$$
$$\leqslant(\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'})^2$$
$$\leqslant\sqrt{(s+s')(t+t')(u+u')(v+v')}.$$

这就证明了不等式(8.46)，从而也就证明了不等式(8.45).

至于(8.45)中等号成立的充要条件，由(8.47)中於 $x:x'=y:y'$ 可以推得 $s:t:u:v=s':t':u':v'$，也就是 a、b、c 与 a'、b'、c' 成比例. 所以说(8.45)中等号成立的充要条件是这两个三角形相似.

第七节中利用例 15 的结论解决了"周长一定的四边形中以正方形的面积为最大". 下面我们应用例 19 的结论来解决"周长一定的三角形中，以正三角形的面积为最大."

首先，不难看出，对任意的三角形有

$$K(a,\ b,\ c)=K(b,\ c,\ a)=K(c,\ a,\ b),$$
$$K\left(\frac{x}{3},\ \frac{y}{3},\ \frac{z}{3}\right)=\frac{1}{3^2}K(x,\ y,\ z).$$

另外由不等式(8.45)不难推得

$$\sqrt{K(a,\ b,\ c)}+\sqrt{K(a',\ b',\ c')}+\sqrt{K(a'',\ b'',\ c'')}$$
$$\leqslant\sqrt{K(a+a'+a'',\ b+b'+b'',\ c+c'+c'')}. \quad (8.48)$$

由此我们容易推出

$$\sqrt{K\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)}+\sqrt{K\left(\frac{b}{3},\ \frac{c}{3},\ \frac{a}{3}\right)}$$
$$+\sqrt{K\left(\frac{c}{3},\ \frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)}$$

$$\leqslant\sqrt{K\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)}$$

或

$$\frac{1}{3}\sqrt{K(a, b, c)}+\frac{1}{3}\sqrt{K(b, c, a)}$$

$$+\frac{1}{3}\sqrt{K(c, a, b)}$$

$$\leqslant\sqrt{K\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)},$$

也即

$$\sqrt{K(a, b, c)}$$

$$\leqslant\sqrt{K\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)}.$$

最后得

$$K(a, b, c)\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right), \tag{8.50}$$

这说明，对边长为 a, b, c 的任意三角形来说（此时 $2S=a+b+c$ 为定值）以等边三角形，即正三角形的面积为最大.

例20 在四面体 $ABCD$ 中，设顶点 A, B, C, D 到所对面的距离分别为 h_A, h_B, h_C, h_D，其内切球的半径为 r，求证：四面体的四面是全等三角形的充要条件是：

$$h_A+h_B+h_C+h_D=16r.$$

证明 设四面体的顶点 A, B, C, D 所对的面的面积分别为 S_A, S_B, S_C, S_D，体积为 V.

必要性：∵四面体的四面是全等三角形，

$$\therefore\quad S_A=S_B=S_C=S_D.$$

从而
$$h_A=h_B=h_C=h_D.$$

又 $$V=\frac{1}{3}S_Ah_A,$$

$$V=\frac{1}{3}(S_A+S_B+S_C+S_D)r=\frac{4}{3}S_Ar,$$

$$\therefore\quad h_A=4r,\quad \therefore\quad h_A+h_B+h_C+h_D=16r.$$

充分性：$\because h_A=\dfrac{3V}{S_A},\ h_B=\dfrac{3V}{S_B},\ h_C=\dfrac{3V}{S_C},\ h_D=\dfrac{3V}{S_D},$

$$\therefore\quad h_A+h_B+h_C+h_D$$

$$=3V\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}\right)$$

即

$$3V\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}\right)=16r,\tag{8.51}$$

又

$$V=\frac{1}{3}(S_A+S_B+S_C+S_D)r,\tag{8.52}$$

(8.52)代入(8.51)，得

$$(S_A+S_B+S_C+S_D)\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}\right)=16.\tag{8.53}$$

$$\because\quad S_A>0,\ S_B>0,\ S_C>0,\ S_D>0,$$

$$\therefore\quad (S_A+S_B+S_C+S_D)\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}\right)\geqslant 16.\tag{8.54}$$

由(8.53)和(8.54)取等号的条件可知

$$S_A=S_B=S_C=S_D.\tag{8.55}$$

如图14，设棱 AB、AC、AD、CD、DB、BC 所对应的二面角的平面角分别为 x、y、z、α、β、γ，则由面积射影定理可得

$$S_A=S_B\cos\alpha+S_C\cos\beta+S_D\cos\gamma.$$

由(8.55)，得

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1, \tag{8.56}$$

同理有

$$\cos x+\cos y+\cos\gamma=1, \tag{8.57}$$

$$\cos x+\cos z+\cos\beta=1, \tag{8.58}$$

$$\cos y+\cos z+\cos\alpha=1. \tag{8.59}$$

由(8.56)～(8.59)易知

$$\cos x=\cos\alpha,\ \cos y=\cos\beta,\ \cos z=\cos\gamma.$$

$$\because\quad 0<x、y、z、\alpha、\beta、\gamma<\pi,$$

$$\therefore\quad \alpha=x,\ y=\beta,\ z=\gamma.$$

作 $AM\perp$ 平面 BCD 于 M，过 M 作 $MN\perp BC$ 于 N，连 AN；作 $BP\perp$ 平面 ACD 于 P，过 P 作 $PQ\perp AD$ 于 Q，连 BQ，据三垂线定理知：$AN\perp BC$，$BQ\perp AD$.

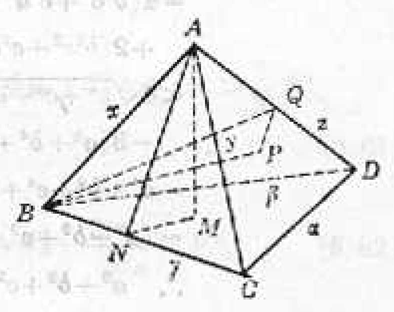


图 14

在 Rt$\triangle AMN$ 与 Rt$\triangle BPQ$ 中，由(8.55)知 $AM=BP$，又

$$\angle ANM=\gamma=z=\angle BQP,$$

$$\therefore\quad \triangle AMN\backsim\triangle BPQ,$$

从而 $AN=BQ$. 又由(8.55)知 $BC\times AN=AD\times BQ$，故

$$BC=AD.$$

同理可证

$$AC=BD,\quad AB=CD.$$

由此可知，四面的三角形三边对应相等，故四面是全等三角形.

例 21　证明：若 a、b、c 为三角形的三边，面积为 S，则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

(1961 年第 3 届 IMO 试题)

证明 设 $p=\frac{1}{2}(b+a+c)$, 则

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$\therefore\quad 16S^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
$$=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-a^4-b^4-c^4,$$

$$\therefore\quad 16\cdot 3S^2=6(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-a^4-b^4-c^4$$
$$=4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-3(a^4+b^4+c^4)$$
$$+2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$
$$\leqslant 4\sqrt{b^4+c^4+a^4}\cdot\sqrt{c^4+b^4+a^4}$$
$$-3(a^4+b^4+c^4)+2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$
$$=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2,$$
$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S.$$

当且仅当 $\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2}{b^2}$, 即 $a=b=c$(三角形为正三角形)时等号成立.

此例就是著名的外森比克 (Weitzenboeck) 不等式. 下面是它在三维空间中的推广:

设四面体 $ABCD$ 的体积为 V, 各顶点 A, B, C, D 所对面的面积分别为 S_A, S_B, S_C, S_D, 则

$$S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2\geqslant\frac{27}{2}\sqrt{3}V^2.$$

等号当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时成立.

证明 记二面角 A-CD-B 为 ϕ_{AB}, 其余类推, 易证得

$$a=\frac{2}{3V}AD\sin\phi_{AD},\quad b=\frac{2}{3V}BD\sin\phi_{BD},$$

$$c=\frac{2}{3V}CD\sin\phi_{CD},$$

代入不等式 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}D$ 中，得

$$S_A^2\sin^2\phi_{AD}+S_B^2\sin^2\phi_{BD}+S_C^2\sin^2\phi_{CD}\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{S_D}V^2. \tag{8.60}$$

由面积射影定理，

$$S_D=S_A\cos\phi_{AD}+S_B\cos\phi_{BD}+S_C\cos\phi_{CD},$$

再由柯西不等式得

$$S_A^2\cos^2\phi_{AD}+S_B^2\cos^2\phi_{BD}+S_C^2\cos^2\phi_{CD}\geqslant\frac{1}{3}S_D^2. \tag{8.61}$$

(8.60)+(8.61)，得

$$3(S_A^2+S_B^2+S_C^2)\geqslant S_D^2+\frac{27\sqrt{3}}{S_D}V^2, \tag{8.62}$$

同理得

$$3(S_A^2+S_B^2+S_D^2)\geqslant S_C^2+\frac{27\sqrt{3}}{S_C}V^2, \tag{8.63}$$

$$3(S_A^2+S_C^2+S_D^2)\geqslant S_B^2+\frac{27\sqrt{3}}{S_B}V^2, \tag{8.64}$$

$$3(S_B^2+S_C^2+S_D^2)\geqslant S_A^2+\frac{27\sqrt{3}}{S_A}V^2. \tag{8.65}$$

将以上四式相加，得

$$8(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2)\geqslant 27\sqrt{3}\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}\right)V^2 \tag{8.66}$$

不妨假定 $S_A^2\geqslant S_B^2\geqslant S_C^2\geqslant S_D^2$，于是

$$\frac{1}{S_A}\leqslant\frac{1}{S_B}\leqslant\frac{1}{S_C}\leqslant\frac{1}{S_D}.$$

应用切比雪夫不等式得

$$\left(S_A^3+S_B^3+S_C^3+S_D^3\right)\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}\right)$$

$$\geqslant 4\left(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2\right). \tag{8.67}$$

由(8.66)、(8.67)即得

$$S_A^3+S_B^3+S_C^3+S_D^3\geqslant\frac{27\sqrt{3}}{2}V^2.$$

综述不等式(8.60)～(8.67)中等号成立的条件可得：在上述推广中，等号当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时成立.

例 **22** 已知四面体 $ABCD$ 的每个面都是锐角三角形，它的外接球的球心为 O，半径为 R，直线 AO、BO、CO、DO 分别交平面 BCD、CDA、DAB、ABC 于 A_1、B_1、C_1、D_1，求证：

$$OA_1+OB_1+OC_1+OD_1\geqslant\frac{4}{3}R.$$

证明 ∵ 四面体 $ABCD$ 的每个面都是锐角三角形，

∴ 它的外接球球心 O 在它的内部.

由体积法易证

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}+\frac{DO}{DD_1}=3,$$

即

$$\frac{R}{R+OA_1}+\frac{R}{R+OB_1}+\frac{R}{R+OC_1}+\frac{R}{R+OD_1}$$

$$=3.$$

由柯西不等式，得

$$\left(\frac{R+OA_1}{R}+\frac{R+OB_1}{R}+\frac{R+OC_1}{R}+\frac{R+OD_1}{R}\right).$$

$$\cdot\left(\frac{R}{R+OA_1}+\frac{R}{R+OB_1}+\frac{R}{R+OC_1}+\frac{R}{R+OD_1}\right)$$

$$\geqslant 16,$$

即
$$3\left(4+\frac{OA_1+OB_1+OC_1+OD_1}{R}\right)\geqslant 16,$$

$$\therefore\quad OA_1+OB_1+OC_1+OD_1\geqslant\frac{4}{3}R.$$

例 22 是 1986 年中国数学奥林匹克国家集训队试题"已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，外心为 O，直线 AO、BO、CO 分别交对边于 A_1、B_1、C_1，求证：$OA_1+OB_1+OC_1\geqslant\frac{3R}{2}$，其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径"的一个推广．

例 23 已知 P 为四面体 $ABCD$ 内任意一点，直线 AP、BP、CP、DP 分别交平面 BCD、CDA、DAB、ABC 于 A_1，B_1，C_1，D_1，求证：

$$\frac{AP}{PA_1}+\frac{BP}{PB_1}+\frac{CP}{PC_1}+\frac{DP}{PD_1}\geqslant 12.$$

证明 由柯西不等式，得

$$\left(\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}+\frac{PD_1}{DD_1}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}+\frac{DD_1}{PD_1}\right)\geqslant 16.$$

易证
$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}+\frac{PD_1}{DD_1}=1,$$

$$\therefore\quad\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}+\frac{DD_1}{PD_1}\geqslant 16,$$

即

$$\frac{AP+PA_1}{PA_1}+\frac{BP+PB_1}{PB_1}+\frac{CP+PC_1}{PC_1}$$
$$+\frac{DP+PD_1}{PD_1}\geqslant 16,$$

$$\therefore \quad \frac{AP}{PA_1}+\frac{BP}{PB_1}+\frac{CP}{PC_1}+\frac{DP}{PD_1}\geqslant 12.$$

本例是"P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，直线 AP、BP、CP 分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F，求证：$\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}\geqslant 6$"的一个推广.

下面再介绍四面体中的一个重要不等式.

例 24 设 P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任一点，顶点 $A_i(i=1,2,3,4)$ 的对面三角形为 $\triangle_i$，P 点在 $\triangle_i$ 上的正投影为 H_i，四面体的外接球半径为 R，则有不等式：

$$\frac{1}{PH_1}+\frac{1}{PH_2}+\frac{1}{PH_3}+\frac{1}{PH_4}\geqslant\frac{12}{R}. \qquad (8.68)$$

此题是下面问题的一种推广：

$\triangle ABC$ 中，设 P 为其内部任一点，P 在 BC、CA、AB 上的正投影分别为 D、E、F，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则有

$$\frac{1}{PD}+\frac{1}{PE}+\frac{1}{PF}\geqslant\frac{6}{R},$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 点为正三角形的中心时上式取等号.

为证(8.68)式，先给出下述引理：

引理 1 在例 24 中的条件下，记 $\triangle_i$ 上的四面体的高为 h_i，则

$$\frac{PH_1}{h_1}+\frac{PH_2}{h_2}+\frac{PH_3}{h_3}+\frac{PH_4}{h_4}=1. \qquad (8.69)$$

证明 (略).

引理 2 条件同上，则在四面体中有

$$h_1+h_2+h_3+h_4\leqslant\frac{16}{3}R, \qquad (8.70)$$

当且仅当四面体为正四面体时(8.70)取等号.

证明　设 G 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心，则对四面体内任一点 P，可证

$$\sum_{i=1}^{4} PA_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{4} GA_i^2.$$

取 P 为外心有

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 \leqslant 4R^2. \tag{8.71}$$

又延长 A_iG 交 $\triangle_i$ 于 G_i，则 G_i 为 $\triangle_i$ 的重心设 $m_i=A_iG_i$，则

$$m_i=\frac{4}{3}GA_i,$$

于是
$$GA_i^2=\frac{9}{16}m_i^2.$$

由此(8.71)式可化为

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^2 \leqslant \frac{64}{9}R^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)^2$$
$$\leqslant 4\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right) \leqslant \frac{4\times 64}{9}R^2. \tag{8.72}$$

而

$$h_i \leqslant m_i, \tag{8.73}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{4} h_i \leqslant \sum_{i=1}^{4} m_i.$$

利用(8.72)式得

$$\left(\sum_{i=1}^{4} h_i\right)^2 \leqslant \frac{4\times 64}{9}R^2,$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{4} h_i \leqslant \frac{16}{3}R$，即(8.70)式成立.

(8.71)式中取等号当且仅当四面体的外心与重心重合，(8.72)中取等号当且仅当各 m_i 相等，(8.73)中取等号当且仅当 $h_i=m_i$，结合(8.72)、(8.73)知取等号当且仅当各 h_i 相等且重心与垂心(重心在四条高线上即垂心存在)重合，而各 h_i

相等的四面体为等面四面体，综上得：

当且仅当四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为等面四面体且四面体的重心、外心、垂心重合时(8.70)取等号，即当且仅当四面体为正四面体时(8.70)中取等号.

下面再来证明(8.68)：利用(8.70)式得

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{PH_i}=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{PH_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}PH_i/h_i\right). \qquad (8.74)$$

由柯西不等式，有

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{PH_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{PH_i}{h_i}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\right)^2, \qquad (8.75)$$

再由算术-几何平均不等式，有

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\right)^2\geqslant 16\left(\frac{1}{h_1h_2h_3h_4}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad (8.76)$$

从而由(8.74)、(8.75)、(8.76)，有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{PH_i}\geqslant 16\left(\frac{1}{h_1h_2h_3h_4}\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (8.77)$$

在(8.75)中，当且仅当各 h_i/PH_i^2 相等时取等号；在(8.76)中当且仅当各 h_i 相等时取等号；故知(8.77)中取等号当且仅当四面体为等四面体且 P 既为内心又为垂心时.

再由(8.70)并利用算术-几何平均不等式有

$$\frac{16}{3}R\geqslant\sum_{i=1}^{4}h_i\geqslant 4(h_1h_2h_3h_4)^{\frac{1}{4}},$$

$$\therefore\quad (1/h_1h_2h_3h_4)^{\frac{1}{4}}\geqslant 3/4R. \qquad (8.78)$$

(8.78)中取等号的条件同(8.70).

将(8.78)代入(8.77)有 $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{PH_i}\geqslant\frac{12}{R}$，即(8.68)成立. 并由(8.77)、(8.78)中取等号的条件知：当且仅当四面体为正四面体且 P 点为正四面体的中心(内心、外心、重心、垂心重合)时，(8.68)式等号成立.

九、其他方面的应用几例

这一节，我们讲柯西不等式在其他方面的一些应用.

例 1 记闭区间$[0, 1]$为I. 设函数$f: I\to I$是单调连续函数，且$f(0)=0$, $f(1)=1$. 求证：f的图象能被n个面积为$\frac{1}{n^2}$的矩形所覆盖.

(1989 年第 30 届 IMO 备选题)

证明 因为$f(1)>f(0)$，故$f(x)$在I上单调递增. 设$x_0\in[0, 1)$，则$(f(x)-f(x_0))(x-x_0)$在$[x_0, 1]$上单调递增且连续. 又$f(x)$在$[x_0, x_1]$上的图象被以点$(x_0, f(x_0))$，$(x_1, f(x_0))$，$(x_1, f(x_1))$，$(x_0, f(x_1))$为顶点的矩形覆盖.

取$x_0=0$，并且取$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，使得

$$(x_i-x_{i-1})(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\frac{1}{n^2}.$$

$\Big($若对于某个$j\leqslant n-2$，有$(1-x_j)(1-f(x_j))<\frac{1}{n^2}$，那么只需用$j+1\leqslant n-1$个面积为$\frac{1}{n^2}$的矩形就能覆盖$f(x)$在$I$上的图象.$\Big)$下面只须证明

$$(1-x_{n-1})(1-f(x_{n-1}))\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

因为

$$(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_{n-1}-x_{n-2})$$
$$+(1-x_{n-1})=1,$$

$$(f(x_1)-f(x_0))+(f(x_2)-f(x_1))$$
$$+\cdots+(1-f(x_{n-1}))=1,$$

由柯西不等式，得

$$1=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$
$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})[f(x_i)-f(x_{i-1})]}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{(1-x_{n-1})(1-f(x_{n-1}))}+\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

其中 $x_n=1$, $f(x_n)=1$, 则

$$(1-x_{n-1})(1-f(x_{n-1}))\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

例2 A_1, A_2, $\cdots$, A_{29} 是29个不同的正整数数列．对于 $1\leqslant i<j\leqslant29$ 及自然数 x, 定义

$$N_i(x)=\text{数列 } A_i \text{ 中} \leqslant x \text{ 的数的个数},$$
$$N_{ij}(x)=A_i\cap A_j \text{ 中} \leqslant x \text{的数的个数}.$$

已知对所有的 $1\leqslant i\leqslant29$ 及每一个自然数 x,

$$N_i(x)\geqslant x/e,\quad e=2.71828\cdots$$

证明至少存在一对 i、$j(1\leqslant i<j\leqslant29)$, 使得

$N_{ij}(1988)>200$.（1988年第29届IMO备选题）

解 不妨假设 $A_i(1\leqslant i\leqslant29)$ 中元素均不超过1988, 每个集合中元素个数

$$N_i(1988)\geqslant\frac{1988}{e}=731.3\cdots,$$

即 $|A_i|\geqslant732$, 不妨设 $|A_i|=732$（否则在这集合中去掉若干元素）, $1\leqslant i\leqslant29$.

考虑元素与集合的表：

集合 \ 元素	1	2	3	…	1988
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	$x_{1,1988}$
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	$x_{2,1988}$
$\vdots$					
A_{29}	$x_{29,1}$	$x_{29,2}$	$x_{29,3}$	…	$x_{29,1988}$

其中 $x_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果 } j\in A_i, \\ 0, \text{如果 } j\notin A_i.\end{cases}$

表中每一行的和为 732，因此总和为 732×29。

另一方面，设第 j 列的和为 $b_j(1\leqslant j\leqslant 1988)$，则

$$\sum_{j=1}^{1988} b_j=732\times 29, \tag{9.1}$$

而

$$\sum_{j=1}^{1988}\binom{b_j}{2}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 29}|A_i\cap A_j|. \tag{9.2}$$

由于柯西不等式，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{1988}\binom{b_j}{2}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{1988} b_j^2-\sum_{j=1}^{1988} b_j\right)\\ &\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1988}\left(\sum_{j=1}^{1988} b_j\right)^2-\sum_{j=1}^{1988} b_j\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{1988} b_j\right)\times\left(\sum_{j=1}^{1988} b_j/1988-1\right)\\ &=\frac{1}{2}\times 732\times 29\times(732\times 29/1988-1)\\ &>\frac{1}{2}\times 29\times 28\times 200,\end{aligned}$$

即

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 29}|A_i\cap A_j|>\frac{1}{2}\times 29\times 28\times 200. \qquad (9.3)$$

(9.3)式的左边有$\binom{29}{2}=\frac{1}{2}\times 29\times 28$项，其中至少有一项

$$|A_i\cap A_j|>300,$$

这就是所要证明的结论.

例3 在三维空间中给定一点O及由总长等于1988的线段组成的有限集A，求证存在一个平面与集A不相交，到O的距离不超过574.

（1988年第29届IMO备选题）

证明 将给定的线段向x，y，z轴投影．设在三个轴上的射影的总长分别为$2a$，$2b$，$2c$，各线段在三个轴上的射影分别为a_i，b_i，c_i，则

$$\begin{aligned}(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2&=(\sum a_i)^2+(\sum b_i)^2+(\sum c_i)^2\\&=\sum_i\sum_j(a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j)\\&\leqslant\sum_i\sum_j\sqrt{(a_i^2+b_i^2+c_i^2)(a_j^2+b_j^2+c_j^2)}\\&=(\sum_i\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2})^2,\end{aligned}$$

于是

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 994^2. \qquad (9.4)$$

设a为a、b、c中最小的，则(9.4)式表明

$$a\leqslant 994/\sqrt{3}<574.$$

所以，x轴上的区间$[-574, 574]$中必有点不属于给定线段的投影．过这样的点作与x轴垂直的平面，它与原点O的距离$\leqslant 574$，并且与点集A不相交.

例4 S为m个正整数对$(a, b)(1\leqslant a<b\leqslant n)$所成的集，

求证：至少有$4m\cdot\dfrac{m-\dfrac{n^2}{4}}{3n}$个三元数组$(a,\ b,\ c)$使得$(a,\ b)$，$(a,\ c)$与$(b,\ c)$都属于$S$（$(a,\ b)$与$(b,\ a)$被认为是相同的）.

（1989 年首届亚太地区数学奥林匹克试题）

证明　考虑n个点$1,\ 2,\ \cdots,\ n$.如果$(i,\ j)\in S$,则在i与j之间连一条线．我们来求这个图中的三角形的个数（也就是具有所述性质的三元组$(a,\ b,\ c)$的个数）T.

设$(i,\ j)\in S$,自i引出的线有$d_{(i)}$条，则以$(i,\ j)$为边的三角形至少有$d_{(i)}+d_{(j)}-n$个．由于每个三角形有三条边，所以S中至少有

$$\frac{1}{3}\sum_{(i,j)\in S}(d_{(i)}+d_{(j)}-n)\tag{9.5}$$

个三角形.

$$\sum_{(i,j)\in S}n=n\sum_{(i,j)\in S}1=nm.\tag{9.6}$$

对于每个固定的i，恰有$d_{(i)}$个j使$(i,\ j)\in S$，所以在(9.5)中的$d_{(i)}$出现了$d_{(i)}$次．注意$(i,\ j)$既可作为自i引出的边，又可作为自j引出的边，被计算了2次．因此

$$\sum_{(i,j)\in S}(d_{(i)}+d_{(j)})=2\sum_{(i,j)}d_{(i)}=\sum_{i=1}^{n}d_{(i)}^2,$$

由柯西不等式得

$$\sum_{i=1}^{n}d_{(i)}^2\geqslant\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}d_{(i)}\Big)^2=\frac{1}{n}(2m)^2=\frac{4m^2}{n}.$$

由(9.5)、(9.6)及上式得

$$T\geqslant\frac{1}{3}\Big(\frac{4m^2}{n}-nm\Big)=4m\cdot\frac{m-\dfrac{n^2}{4}}{3n}.$$

例 5　设Oxy是空间直角坐标系，S是空间中的一个由有限个点所形成的集合，S_x，S_y，S_z分别是S中所有的点在

Oyz 平面，Ozx 平面，Oxy 平面上的正交投影所成的集合．求证：

$$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|,$$

其中 $|A|$ 表示有限集合 A 中的元素数目．

（1992 年第 33 届 IMO 试题）

证明 设共有 n 个平行于 Oxy 平面的平面上有 S 中的点，这些平面记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，任取一 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$，设它与 Oyz，Ozx 平面交成直线 y'，x'，并设 α_i 上有 c_i 个 S 中的点，则显然有 $c_i\leqslant|S_z|$．

记 α_i 上的点在 x' 上的正交投影集合为 A_i，在 y' 上的正交投影集合为 B_i，并记 $b_i=|B_i|$，$a_i=|A_i|$，那么 α_i 上 S 中的点数 c_i 不超过 a_ib_i，即 $c_i\leqslant a_ib_i$．

又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=|S_y|$，$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=|S_x|$，$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i=|S|$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad &|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|\\&=(b_1+b_2+\cdots+b_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot|S_z|.\end{aligned}$$

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}&(b_1+b_2+\cdots+b_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)|S_z|\\&\geqslant(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n})^2\cdot|S_z|\\&\geqslant(\sqrt{a_1b_1|S_z|}+\sqrt{a_2b_2|S_z|}+\cdots+\sqrt{a_nb_n|S_z|})^2\\&\geqslant(\sqrt{c_1\cdot c_1}+\sqrt{c_2\cdot c_2}+\cdots+\sqrt{c_n\cdot c_n})^2\\&=(c_1+c_2+\cdots+c_n)^2=|S|^2,\end{aligned}$$

即
$$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$

例 6 有一个 3×7 棋盘，用黑、白色两种颜色去染棋盘上的方格，每个方格染且只染一种颜色．求证：不论怎样染色，棋盘上由方格组成的矩形中总有这样的矩形，其边与棋盘相应的边平行，而四个角上的方格颜色相同．如果棋盘是 4

×6 的，则存在一种染法，使棋盘上不含有这样的矩形.

（1976 年美国数学竞赛试题）

证明 用黑白二色去染棋盘上的方格，每个方格染且只染一种颜色，得到的棋盘叫做二色棋盘. 题目中所说的四角同色的矩形简称为单色矩形. 于是，问题即是要证明：任意一个二色 3×7 棋盘上总有单色矩形，而且存在一个二色 4×6 棋盘，它不含单色矩形.

首先，图 15 给出了一个二色 4×6 棋盘，它不含单色矩形.

图 15

下面证明：任意一个二色 3×7 棋盘上总有单色矩形.

二色 3×7 棋盘上共有 3×7＝21 个方格，两种颜色，必至少有 11 个方格同色，不妨设它们都是黑色的，设第 i 列上有 d_i 个黑色方格，$i=1, 2, \cdots, 7$，则 $r=\sum\limits_{i=1}^{7} d_i \geqslant 11$. 在第 i 列上取两个黑色方格，它们连同它们之间的方格组成首尾两端都是黑色方格的长方形，这样的长方形共有 $C_{d_i}^2$ 个. 将这些长方形投影到第 1 列，则第 1 列上共有 $\sum\limits_{i=1}^{7} C_{d_i}^2$ 个首尾两端都是黑色方格的长方形. 如果二色 3×7 棋盘上不含单色矩形，则这首尾两端都是黑色方格的长方形两两不同，而第 1 列上长方形之总数为 $C_3^2=3$. 因此，

$$\sum_{i=1}^{7} C_{d_i}^2 \leqslant C_3^2, \quad \therefore \ \sum_{i=1}^{7} d_i^2 - \sum_{i=1}^{7} d_i \leqslant 6.$$

由柯西不等式得

$$\frac{1}{7}\left(\sum_{i=1}^{7} d_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{7} d_i = \frac{1}{7} r^2 - r \leqslant 6,$$

即

$$42 \geq r^2 - 7r = \left(r - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\geq \left(11 - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 44,$$

矛盾．因此，二色 3×7 棋盘上必有单色矩形．

例 7 有一个 5×5 棋盘，用黑、白二色去染棋盘上的方格，每格染且只染一种颜色．求证：棋盘上必有一个单色矩形．

证明 二色 5×5 棋盘共有 25 个方格，两种颜色，其中必至少有 13 个方格同色，不妨设有 13 个黑色方格，设第 i 列上有 d_i 个黑色方格，$i=1, 2, \cdots, 5$．则 $r=\sum_{i=1}^{5} d_i \geq 13$．且第 i 列上首尾两端为黑色方格的长方形有 $C_{d_i}^2$ 个．把它们投影到第 1 列上．如果二色 5×5 棋盘上没有单色矩形，则投影到第 1 列上的长方形两两不同，因此，第 1 列上共有 $\sum_{i=1}^{5} C_{d_i}^2$ 个首尾黑色的长方形．另一方面，第 1 列上有 5 个方格，因此共有 $C_5^2=10$ 个长方形．于是，有

$$\sum_{i=1}^{5} C_{d_i}^2 \leq C_5^2 = 10, \quad 即 \quad \sum_{i=1}^{5} d_i^2 - \sum_{i=1}^{5} d_i \leq 20.$$

由柯西不等式，得

$$\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} d_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{5} d_i \leq 20,$$

因此，

$$100 \geq r^2 - 5r = \left(r - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\geq \left(13 - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 104,$$

矛盾．所以，二色 5×5 棋盘上必有单色矩形．

例 8 用红、蓝、黄三种颜色去染 12×12 棋盘上的方格，

每格染且只染一种颜色．求证：不论怎样染法，棋盘上一定含有单色矩形．

（1983 年瑞士数学竞赛试题）

证明 将题目中条件 12 改成 11，即证明任意一个三色 11×11 棋盘上必有单色矩形．证明如下：

三色 11×11 棋盘上共有 121 个方格，三种颜色，必有 41 个方格同色，不妨设它们为红色．设第 i 列上有 S_i 个红色方格，$i=1, 2, \cdots, 11$，则 $r=\sum\limits_{i=1}^{11} d_i\geqslant 41$，且第 i 列上首尾两端为红色的长方形共有 $C_{d_i}^2$ 个，把它们投影到第 1 列上，如果三色 11×11 棋盘上不含单色矩形，则第 1 列上将有 $\sum\limits_{i=1}^{11} C_{d_i}^2$ 个首尾两端都是黑色的长方形．另一方面，第 1 列上长方形个数为 $C_{11}^2=55$．因此

$$\sum_{i=1}^{11} C_{d_i}^2\leqslant C_{11}^2=55,$$

即有

$$\sum_{i=1}^{11} d_i^2-\sum_{i=1}^{11} d_i\leqslant 110.$$

由柯西不等式，有

$$\frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{11} d_i\right)^2-\sum_{i=1}^{11} d_i\leqslant 110,$$

因此

$$1210\geqslant r^2-11r=\left(r-\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$\geqslant\left(41-\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2=1230,$$

矛盾．所以三色 11×11 棋盘必有单色矩形．

例 9 六个人参加一个宴会，其中任意两人要么相互认识，要么互不认识．求证：其中必有两个三人组，使得每个组

中任意两人都互相认识，或者都互不认识(这两个三人组允许有公共成员)．

(1988 年加拿大集训队试题)

视六个人为六个顶点，其集合记作 V，V 中任意两个顶点间都连一线段，得到 6 阶完全图 K_6．用红、蓝两种颜色去染 K_6 的边，当且仅当顶点 u 与 v 所代表的两个人相互认识时，顶点 u 与 v 之间的边染红色，得到二色完全图 K_6．在二色 K_6 中，如果 $\triangle uvw$ 的三边 uv, vw, wu 都是红色(或蓝色)的，则 $\triangle uvw$ 称为单色三角形．于是所要证明的命题是：任意一个二色完全图 K_6 中至少有两个单色三角形．

证明 设二色完全图 K_6 中分别具有 x 与 y 个单色与非单色三角形，则

$$x+y=C_6^3. \tag{9.7}$$

由于图 K_6 有 $C_6^2=15$ 条边，二种颜色，因此至少有 8 条边同色，不妨设它们是红色的．设二色完全图中有 r 条红边，则 $r\geqslant 8$．设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$，且设顶点 v_i 连有 d_i 条红边，$i=1, 2, \cdots, 6$，则有

$$d_1+d_2+\cdots+d_6=2r. \tag{9.8}$$

在 K_6 中以 v_i 为顶点的两条边同色的三角形个数为 $C_{d_i}^2+C_{5-d_i}^2$ 个$(i=1, 2, \cdots, 6)$，其和为 $\sum\limits_{i=1}^{6} C_{d_i}^2+\sum\limits_{i=1}^{6} C_{5-d_i}^2$．注意，在此和中，$K_6$ 中每个单色三角形重复算了 3 次，而非单色三角形只算了一次．因此得到

$$\sum_{i=1}^{6} C_{d_i}^2+\sum_{i=1}^{6} C_{5-d_i}^2=3x+y. \tag{9.9}$$

解联立方程(9.7)、(9.9)得

$$2x=\sum_{i=1}^{6} C_{d_i}^2+\sum_{i=1}^{6} C_{5-d_i}^2-C_6^3$$

$$=\sum_{i=1}^{6} d_i^2-5\sum_{i=1}^{6} d_i-40.$$

由柯西不等式得到

$$2x\geqslant\frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} d_i\right)-5\sum_{i=1}^{6} d_i+40.$$

由(9.8)得
$$2x\geqslant\frac{2}{3}r^2-10r+40,$$

即
$$x\geqslant r\left(\frac{1}{3}r-5\right)+20\geqslant 6\left(\frac{1}{3}-5\right)+20=\frac{4}{3}.$$

由于 x 为整数，所以 $x\geqslant 2$.

例 10 n 为自然数，不大于 44. 求证对每个定义在 N^2 上，值在集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的函数 f，存在四个有序数对 (i, j), (i, k), (l, j), (l, k)，满足

$$f(i, j)=f(i, k)=f(l, j)=f(l, k),$$

其中 i, j, l, k 是这样的自然数：存在自然数 m, p 使

$$1989m\leqslant i<l<1989+1989m,$$
$$1989p\leqslant j<k<1989+1989p.$$

(1989 年第 30 届 IMO 备选题)

证明 将函数值为 $t(1\leqslant t\leqslant n)$ 的点染上第 t 种颜色. 问题即将正方形

$$\{(x, y)\mid 1989m\leqslant x<1989(m+1),$$
$$1989p\leqslant y<1989(p+1)\}$$

中的整点染上颜色，证明在颜色种数 $\leqslant 44$ 时，必有一个边与坐标轴平行的矩形，四个顶点是同一种颜色.

由于正方形中有 1989^2 个整点，因而至少有 $\left[\frac{1989^2}{44}\right]+1=q$ 个点涂上同一种颜色，所以，只需证明将正方形中 q 个点染上红色时，必有一个顶点为红色的矩形，它的边平行于坐标轴.

设第 i 列中有 a_i 个点染上红色，则

$$\sum_{i=1}^{1989} a_i = q = \left[\frac{1989^2}{44}\right]+1. \tag{9.10}$$

在第 i 列，有 $C_{a_i}^2$ 对点，每一对由两个红点组成．如果

$$\sum_{i=1}^{1989} C_{a_i}^2 > C_{1989}^2, \tag{9.11}$$

那么必有两列，这两列中有一对红点在相同的两行上，也就是四个点构成一个合乎要求的矩形．由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1989} C_{a_i}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1989}(a_i^2-a_i) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{1989} a_i^2 - q\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{1989} a_i}{1989}\right)^2 - q\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{1989}-q\right)\\ &= \frac{q}{2\times1989}(q-1989) \geqslant \frac{1989}{2\times44}\\ &\quad\times\left(\frac{1989^2}{44}-1989\right)\\ &= \frac{1989^2}{2\times44^2}\times1945 > \frac{1989^2}{2} > C_{1989}^2.\end{aligned}$$

因此结论成立．

例 11　已知一个由 0，1 组成的数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$．A 为等于(0，1，0)或(1，0，1)的三元数组 (x_i, x_j, x_k)，$i<j<k$ 的个数，对 $1\leqslant i\leqslant n$，令 d_i 为满足 $j<k$，并且 $x_j=x_i$，或者 $j>i$，并且 $x_j\neq x_i$ 的 j 的个数．(1) 求证：$A=C_n^3-C_{d_1}^2-C_{d_2}^2-\cdots-C_{d_n}^2$；(2) 给定奇数 n，A 的最大值是多少？

（1987 年第 16 届美国数学奥林匹克试题）

证明　(1) 略．

(2) 设 $n=2k+1$ 为给定的奇数．

又设在 $x_1, x_2, \cdots, x_{2k+1}$ 中有 s 个 0，t 个 1，其中 $s+t=$

n. 若 $x_i=1$, 设这个1是第 j 个1, 则在它前面有 $j-1$ 个1, $i-j$ 个0, 后面有 $t-j$ 个1, $s-(i-j)$个0, 于是

$$d_i=(j-1)+[s-(i-j)]=s-i+2j-1.$$

同样, 若 $x_i=0$, 设这个0是第 j 个0, 则在它前面有 $j-1$ 个0, 在它后面有 $t-(i-j)$个1, 于是

$$d_i=(j-1)+[t-(i-j)]=t-i+2j-1,$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n} d_i=\sum_{x_i=1} d_i+\sum_{x_i=0} d_i$$

$$=2st-\sum_{i=1}^{n} i+s(s+1)+t(t+1)-n$$

$$=(s+t)^2+(s+t)-\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(d_i-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2-\sum_{i=1}^{n} d_i\right).$$

由柯西不等式, 得

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n} d_i\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i-1\right)$$

$$=\frac{1}{4}n(n-1)\left[\frac{1}{2}(n-1)-1\right]$$

$$=\frac{1}{8}n(n-1)(n-3).$$

因为 $n=2k+1$, 所以 $n-1=2k$, $n-3=2k-2$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2\geqslant\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)$$

$$=\frac{n}{2}k(k-1)=nC_k^2$$

当且仅当所有的 $d_i=\frac{1}{2}(n-1)-k$ 时，等号成立．这就是说，对于每个 x_i，d_i 都相同．

若 $x_i=1$，则 $d_i=k$，从而 $s=k$，$t=k-1$，设第 j 个位置是 x_i，则

$$k=d_i=s-i+2j-1=k-i+2j-1,$$

即

$$i=2j-1.$$

于是所有的奇数位都是 1，得到数列

$$1,0,1,0,\cdots,0,1.$$

若 $x_i=0$，同样得到数列 0，1，0，1，…，0，1，0．此时

$$A\geqslant C_{2k+1}^3-nC_k^2.$$

A 的最小值为 $C_{2k+1}^3-nC_k^2$．

十、柯西不等式的几种重要变形

柯西不等式有许多有趣的变形．在证题时，若能充分利用它的一些巧妙变形，有时会收到意想不到的效果．为了便于说明起见，下面介绍几个有趣的变形，并举例说明各种变形在证题中的应用．

由柯西不等式，得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

$$\therefore\quad\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}.\qquad(10.1)$$

其中当且仅当 $a_i=kb_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 时，等号成立．

利用(10.1)可以使某些无理不等式得到极为简便的证法．

例 1　设 a、b、$c\in R^+$，$x\in R$，求证：

$$\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}\geqslant\sqrt{c^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}.$$

证明　由(10.1)式，得

$$\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}-\sqrt{x^2+a}$$

$$\leqslant\left|\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}-\sqrt{x^2+(\sqrt{a})^2}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{(c-x)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}$$

$$=\sqrt{(c-x)^2+b},$$

即 $$\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}\geqslant\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

例 2 设 $a\in R$，求证：

$$\left|\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}\right|<1.$$

（1978 年罗马尼亚数学奥林匹克试题）

证明 由(10.1)得

$$\left|\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}\right|$$

$$=\left|\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{\left[a+\frac{1}{2}-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right]^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=1.$$

又 $$\because\ \left(a+\frac{1}{2}\right)\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\left(a-\frac{1}{2}\right)\Big/\frac{\sqrt{3}}{2},$$

∴ 上式等号不成立.

故 $$\left|\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}\right|<1.$$

利用(10.1)很容易证明著名的三角形不等式：

设 $a, b\in R$，则

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}. \tag{10.2}$$

当且仅当 $a_i=kb_i$ 时等号成立.

证明由读者自己完成.

例 3 求 $f(x)=\left|\sqrt{(x-a)^2+b^2}-\sqrt{(x-c)^2+d^2}\right|$ 的最大值.

解 将已知解析式两边平方可得

$$f^2(x)=\left|\sqrt{(x-a)^2+b^2}-\sqrt{(x-c)^2+d^2}\right|^2$$

$$\leqslant(x-a-x+c)^2+(b-d)^2$$

$$=(c-a)^2+(b-d)^2.$$

当且仅当$(x-a)/b=(x-c)/d$，即

$$x=\frac{bc-ad}{b-d}$$

时，等号成立($b\neq d$)。

于是，当$b\neq d$时，$f(x)$有最大值$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$；当$b=d$，$a\neq c$时，$f(x)$无最大值。

例4 解方程

$$\left|\sqrt{4x^2+4x+26}-\sqrt{x^2+4x+20}\right|=\sqrt{x^2-2x+2}.$$

解 由(10.1)式，得

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{4x^2+4x+26}-\sqrt{x^2+4x+20}\right|\\&=\left|\sqrt{(2x+1)^2+5^2}-\sqrt{(x+2)^2+4^2}\right|\\&\leqslant\sqrt{(x-1)^2+1}=\sqrt{x^2-2x+2},\end{aligned}$$

当且仅当$(2x+1):5=(x+2):4$，即$x=2$时，等号成立。

所以，原方程的根为$x=2$。

例5 解方程

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\theta+\sin^2\theta}+\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin\theta+\sin^2\theta}=1+\frac{1}{6}\sqrt{30}.$$

解

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\theta+\sin^2\theta}+\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin\theta+\sin^2\theta}\\&=\sqrt{\left(\sin\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\\&\quad+\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\sin\theta\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}\\&\geqslant\sqrt{\left(\sin\theta-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=1+\frac{1}{6}\sqrt{30}.$$

不等式取等号的条件是

$$\frac{\sin\theta-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\sin\theta}=\frac{\sqrt{15}/4}{\frac{2}{3}\sqrt{2}},$$

解之得 $\sin\theta=\frac{1}{7}(13-2\sqrt{30})$.

$$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\arcsin\frac{13-2\sqrt{30}}{7}\quad(n\in I).$$

例6　已知α为锐角，且

$$\sqrt{\sin^2\alpha+\cos\alpha}+\sqrt{(\sin\alpha-1)^2+\operatorname{ctg}\alpha}=\sqrt{1+\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-2\sqrt{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}},$$

求 $\log_{\frac{3}{2}}\left(\sin^2\alpha+\sqrt{5}\sin\alpha+\frac{5}{4}\right)$的值.

解　由已知条件及不等式(10.2)，得

$$\sqrt{\sin^2\alpha+\cos\alpha}+\sqrt{(\sin\alpha-1)^2+\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+(\sqrt{\cos\alpha})^2}+\sqrt{(\sin\alpha-1)^2+(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})^2}$$

$$\geqslant\sqrt{[\sin\alpha+(1-\sin\alpha)]^2+(\sqrt{\cos\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})^2}$$

$$=\sqrt{1+\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+2\sqrt{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}}$$

不等式取等号的条件是

$$\sin\alpha/(1-\sin\alpha)=\sqrt{\cos\alpha}/\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha},$$

化简整理得

$$(\sqrt{\sin\alpha})^2+(\sqrt{\sin\alpha})-1=0.$$

$$\because\quad 0<\sqrt{\sin\alpha}<1,\quad\therefore\quad \sqrt{\sin\alpha}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

两边平方得 $\qquad \sin\alpha = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故 $\qquad$ 原式 $= \log_{\frac{3}{2}}\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$$= \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.$$

类似地，可以求

(1) 函数 $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 40}$ 的最小值；

(2) 函数 $y = \left|\sqrt{x^2 + 2x + 37} - \sqrt{x^2 - 4x + 20}\right|$ 的最大值.

下面再介绍柯西不等式的一个有用的变形.

在柯西不等式中，令 $x_i^2 = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，$y_i^2 = a_i^2/b_i$，即可得变形的不等式：

设 $a_i \in R$，$b_i \in R^+ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}. \tag{10.3}$$

等号成立当且仅当 $a_i = \lambda b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

在柯西不等式中，令 $x_i = \sqrt{a_i/b_i}$，$y_i = \sqrt{a_i b_i}$，即可得变形的不等式：

设 a_i 是不全为零的非负实数，$b_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}. \tag{10.4}$$

等号当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时成立.

下面举例说明上面两个不等式的应用.

例 7 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^+$，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

（1984 年全国高中数学联赛试题）

证明 由不等式(10.3)，得

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n+a_1}$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

例 8 已知 $x>0$, $y>0$, 且 $x+2y=1$,

求证：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

证明

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{2y}=\frac{1^2}{x}+\frac{(\sqrt{2})^2}{2y}$$

$$\geqslant\frac{(1+\sqrt{2})^2}{x+2y}=(1+\sqrt{2})^2$$

$$=3+2\sqrt{2}.$$

例 9 设 $x>0$, $y>0$, $z>0$, 且 $x+y+z=1$, 求 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 的最小值.

（1990 年日本 IMO 代表第一轮选拔赛试题）

解 由不等式(10.3)，得

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=\frac{1^2}{x}+\frac{2^2}{y}+\frac{3^2}{z}$$

$$\geqslant\frac{(1+2+3)^2}{x+y+z}=36,$$

当 $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{2}$ 时上式取等号, 故最小值为 36.

例 10 设 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ 且 $a+b+c\leqslant 3$, 求证：

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{3}{2}$$
$$\leqslant\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

（第15届全俄中学生数学竞赛（十年级）试题）

证明 (1) 由不等式(10.3)，令 $a_i=1$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}. \tag{10.5}$$

在(10.5)中，令 $n=3$，则

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geqslant\frac{3^2}{3+(a+b+c)}$$
$$\geqslant\frac{3^2}{3+3}=\frac{3}{2}.$$

(2) $\because\ 1+a_i^2\geqslant 2a_i$，$\therefore\ \dfrac{a_i}{1+a_i^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

$$\therefore\ \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

利用同样的方法和技巧可得如下推广：

推广 设 $a_i\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant n$，$n\geqslant 2$，$n\in N$，则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i^2}\leqslant\frac{n}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}$；

(2) $$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{-a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{(n-1)-a_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}\right]\leqslant\frac{n}{2}$$
$$\leqslant n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{(n-1)-a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right].$$

例 11 设 a, b, c 为正数，求证：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

（第 2 届"友谊杯"国际数学邀请赛试题）

证明 由不等式(10.3)得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2}.$$

下面对上题作如下几种推广：

推广 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数，则

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}$$

$$\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{2}.$$

特别地，若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，则有

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

（第 24 届全苏中学生（十年级）数学竞赛试题）

证明 ∵ $a_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}$$

$$\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\cdot[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots$$

$$+\cdots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1)]^{-1}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

推广 2 设 $a_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，$s=\sum_{i=1}^{n}a_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{s-a_i}\geqslant\frac{s}{n-1}.$$

推广 3　设 $a_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $1\leqslant p<n$, $p\in N$，则

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_p)^2}{a_{p+1}+a_{p+2}+\cdots+a_n}+\frac{(a_2+a_3+\cdots+a_{p+1})^2}{a_{p+2}+a_{p+3}+\cdots+a_n+a_1}$$
$$+\cdots+\frac{(a_n+a_1+\cdots+a_{p-1})^2}{a_p+a_{p+1}+\cdots+a_{n-1}}$$
$$\geqslant\frac{p^2}{n-p}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

推广 4　设 $\alpha_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，$1\leqslant p$, $m<n$，且 $p\neq m$，则

$$\frac{(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m)^2}{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_p\alpha_p}+\frac{(a_1\alpha_2+a_2\alpha_3+\cdots+a_m\alpha_{m+1})^2}{a_1\alpha_2+a_2\alpha_3+\cdots+a_p\alpha_{p+1}}$$
$$+\cdots+\frac{(a_1\alpha_n+a_2\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_{m-1})^2}{a_1\alpha_n+a_2\alpha_1+\cdots+a_p\alpha_{p-1}}$$
$$\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_p}\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n).\qquad(10.6)$$

证明　设 $x_1=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m$，$x_2=a_1\alpha_2+a_2\alpha_3+\cdots+a_m\alpha_{m+1}$，$\cdots$，$x_n=a_1\alpha_n+a_2\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_{m-1}$。

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}x_i=a_1\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+a_2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\cdots+a_m\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_m)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

同理可得：以上原式分母的各项之和为

$$(a_1+a_2+\cdots+a_p)\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

于是由(10.3)式得

$$(10.6)\text{式左边}\geqslant\frac{\left[(a_1+a_2+\cdots+a_m)\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\right]^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_p)\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}$$
$$=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_p)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

例 12 已知 α、$\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，求证：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9.$$

（1979 年全国中学生数学竞赛试题）

证明

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}$$
$$=\frac{1^2}{\cos^2\alpha}+\frac{1^2}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}+\frac{1^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$
$$\geqslant\frac{(1+1+1)^2}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}$$
$$=9.$$

等号当且仅当 $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}=\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$ 即 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$ 时成立。

例 13 已知 $x+2y+3z+4u+5v=30$，求 $\omega=x^2+2y^2+3z^2+4u^2+5v^2$ 的最小值。

（《数学通报》1988 年第 3 期问题 522）

解

$$\omega=\frac{x^2}{1}+\frac{(2y)^2}{2}+\frac{(3z)^2}{3}+\frac{(4u)^2}{4}+\frac{(5v)^2}{5}$$
$$\geqslant\frac{(x+2y+3z+4u+5v)^2}{1+2+3+4+5}$$
$$=30^2/15=60.$$

等号当且仅当 $x/1=2y/2=3z/3=4u/4=5v/5$，即 $x=y=z=u=v=2$ 时成立，故 $\omega_{\min}=60$。

例 14 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，P 到其三边 a、b、c 的距离分别为 x、y、z，求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ 的极小值。

（1981 年第 22 届 IMO 试题）

解 $\because$ $ax+by+cz=2S_{\triangle ABC}$ 是定值，故由不等式(10.4)得

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}=\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}.$$

等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立. 故当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时，

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)_{\min}=(a+b+c)^2/2S_{\triangle ABC}.$$

例 15 已知 a, b, c 是三角形的三边长，S 是三角形的面积，设 $p=(a^2+b^2+c^2)/S$，试确定 p 的最小值及取得最小值的条件.

解 由(10.3)知

$$p=\frac{a^2+b^2+c^2}{S}=\frac{a^2}{S}+\frac{b^2}{S}+\frac{c^2}{S}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{S+S+S}=\frac{(a+b+c)^2}{3S}.$$

等号成立的条件是 $a/S=b/S=c/S$，即 $a=b=c$.

此时三角形为正三角形，且有

$$(a+b+c)^2=(3a)^2=9a^2,$$

$$S=\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{3S}=4\sqrt{3},$$

故
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{S}\geqslant4\sqrt{3}.$$

亦即
$$a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}S.$$

这正是著名的 Weitzenboeck 不等式.

例 16 设 x, y, z, λ, μ, $3\lambda-\mu$ 均大于 0, 且 $x+y+z=1$，求证：

$$f(x, y, z)=\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant\frac{3}{3\lambda-\mu}.$$

（《数学通报》1990年第8期问题）

证明

$\because \quad f(x, y, z)=\dfrac{x^2}{\lambda x-\mu x^2}+\dfrac{y^2}{\lambda y-\mu y^2}+\dfrac{z^2}{\lambda z-\mu z^2},$

$\therefore$ 由(10.3)式得

$$f(x, y, z)\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{\lambda(x+y+z)-\mu(x^2+y^2+z^2)}$$

$$=\frac{1}{\lambda-\mu(x^2+y^2+z^2)}.$$

另一方面，有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore \quad f(x, y, z)\geqslant\frac{1}{\lambda-\mu\cdot\dfrac{1}{3}}=\frac{3}{3\lambda-\mu}.$$

例17 已知 $a, b, c>0$，且 $5a^4+4b^4+6c^4=90$，求证：$5a^3+2b^3+3c^3\leqslant45$.

证明 由不等式(10.4)，得

$$90=\frac{5a^3}{\dfrac{1}{a}}+\frac{2b^3}{\dfrac{1}{2b}}+\frac{3c^3}{\dfrac{1}{2c}}$$

$$\geqslant\frac{(5a^3+2b^3+3c^3)^2}{5a^2+b^2+3c^2/2},$$

又

$$90=5a^2\Big/\frac{1}{a^2}+b^2\Big/\frac{1}{4b^2}+\frac{3c^2}{2}\Big/\frac{1}{4c^2}$$

$$\geqslant\frac{\left(5a^2+b^2+\dfrac{3}{2}c^2\right)^2}{5+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}},$$

$$\therefore \quad 5a^2+b^2+\frac{3}{2}c^2 \leqslant \frac{45}{2}.$$

从而
$$90 \geqslant (5a^2+2b^2+3c^2)^2 \Big/ \frac{45}{2},$$

$$\therefore \quad 5a^2+2b^2+3c^2 \leqslant 45.$$

例 18 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+5}$$
$$+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+5} \leqslant 4\sqrt{3}.$$

证明 $\because A+B+C=\pi,$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1,$$

$$\therefore \quad 16=\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+5\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+5\right)$$
$$+\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+5\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+5}\right)^2}{1}+\frac{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+5}\right)^2}{1}$$
$$+\frac{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+5}\right)^2}{1}$$

$$\geqslant \frac{\left(\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+5}\right)^2}{1+1+1},$$

$$\therefore \quad \sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+5}$$

$$+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+5}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

例 19 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$, $n>1$, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, 求 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{1-x_n}$ 的最小值.

解 将不等式(10.4)变形, 得

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)&=\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{1-x_n}\\&\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\\&=\frac{1}{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2&=x_1^2/1+x_2^2/1+\cdots+x_n^2/1\\&\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{1+1+\cdots+1}\\&=\frac{1}{n},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geqslant\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n}{n-1}.$$

等号当且仅当 $1-x_1=1-x_2=\cdots=1-x_n$, 即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ 时成立.

故 $$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)_{\min}=\frac{n}{n-1}.$$

例 20 若 $a_i>0$, 又 $\sum_{i=1}^{n}a_i=m$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant n(m^2+n^2)^2/m^2n^2.$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2}{1}$$

$$\geqslant\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\right]^2}{1+1+\cdots+1}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2.$$

又 $\because\ \sum_{i=1}^{n}a_i=m,$

及 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant\frac{(1+1+\cdots+1)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\frac{n^2}{m},$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{1}{n}\left(m+\frac{n^2}{m}\right)^2=\frac{n(m^2+n^2)^2}{m^2n^2}.$

例21 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正实数，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

（1991年亚太地区数学竞赛试题）

证明 由不等式(10.3)，易得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\Big/\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\Big/\left[\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\right]$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\Big/2\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

利用完全类似的方法，推广得

设 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}; \cdots; a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}$ 全为正实数，且 $\sum_{i=1}^{n}a_{1k}=\sum_{i=1}^{n}a_{2k}=\cdots=\sum_{i=1}^{n}a_{mk}$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}^{2}\Big/\sum_{j=1}^{m}a_{jk}\right)\geqslant\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\quad(1\leqslant i\leqslant m,\ i\in N).$$

例22 设 a、b、c、d 为非负实数，且 $ab+bc+cd+da=1$，求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

(1990 年第 31 届 IMO 备选题)

证明 当 a, b, c, d 中有一个(至多两个)为 0 时易证不等式，下面仅证 a、b、c、d 全大于 0 的情形。

记待证式左边为 S，则 S 可化为

$$S=\frac{a^4}{a(b+c+d)}+\frac{b^4}{b(c+d+a)}+\frac{c^4}{c(d+a+b)}+\frac{d^4}{d(a+b+c)},$$

于是由不等式(10.3)，得

$$S\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2[(ab+bc+cd+da)+ac+bd]}$$

$$=\frac{1}{9}[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)+(d^2+a^2)+(a^2+b^2+c^2+d^2)]^2/2(1+ac+bd)$$

$$\geqslant\frac{[2(ab+bc+cd+da)+(a^2+c^2)+(b^2+d^2)]^2}{18(1+ac+bd)}$$

$$=\frac{[2+(a^2+c^2)+(b^2+d^2)][2+a^2+b^2+c^2+d^2]}{18(1+ac+bd)}$$

$$\geqslant\frac{[2+2ac+2bd][2+a^2+b^2+c^2+d^2]}{18(1+ac+bd)}$$

$$=\frac{2+a^2+b^2+c^2+d^2}{9}.$$

显然 $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da=1$,

$$\therefore \quad S \geqslant \frac{2+1}{9}=\frac{1}{3}.$$

当 a, b, c, d 中有一个或两个为 0 时，类似以上证法证明更易.

例 23 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^+$, 求证:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \leqslant \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

(1991 年第 32 届 IMO 加拿大训练题)

证明 由柯西不等式的变形式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2, \ (a_i>0,\ b_i>0)$$

令 $b_i=a_{i+1}+a_{i+2}$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_{i+1}+a_{i+2}) \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2,$$

其中 $a_{n+i}=a_i$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i(a_{i+1}+a_{i+2})}.$$

若能证得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i(a_{i+1}+a_{i+2}) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \Big/ 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

则命题成立. 而后者等价于:

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i(a_{i+1}+a_{i+2}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(a_i^2+a_{i+1}^2)+(a_i^2+a_{i+2}^2)\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i(a_{i+1}+a_{i+2}), \tag{10.7}$$

而 $a_i^2+a_{i+1}^2 \geqslant 2a_i a_{i+1}$, $a_i^2+a_{i+2}^2 \geqslant 2a_i a_{i+2}$.

∴ 不等式(10.7)成立, 即原不等式成立.

不等式(10.3)可以推广为：

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为任意实数，$n\geqslant 2$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = A$. $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中有一个负数，$n-1$ 个正数，且 $\sum_{i=1}^{n} b_i = B<0$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2/b_i)\geqslant A^2/B. \tag{10.8}$$

当且仅当 $a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$ 时，(10.8)式等号成立.

证明 不妨设 $b_1<0$，$b_2, b_3, \cdots, b_n>0$. 因 $-B>0$，由柯西不等式，有

$$\begin{aligned}&[(-B)+b_2+\cdots+b_n]\cdot\left[\left(-\frac{A^2}{B}\right)+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right]\\&=[(\sqrt{-B})^2+(\sqrt{b_2})^2+\cdots+(\sqrt{b_n})^2]\\&\quad\cdot\left[\left(\frac{A}{\sqrt{-B}}\right)^2+\left(\frac{-a_2}{\sqrt{b_2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{-a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\right]\\&\geqslant(A-a_2-\cdots-a_n)^2=a_1^2.\end{aligned}$$

注意到 $-B+b_2+\cdots+b_n=-b_1>0$，则

$$-\frac{A^2}{B}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{a_1^2}{-b_1},$$

移项即得不等式(10.8)成立.

根据柯西不等式等号成立条件，知当且仅当

$$\frac{A}{-B}=\frac{-a_2}{b_2}=\cdots=\frac{-a_n}{b_n}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

时，(10.8)式取等号.

在应用不等式(10.8)解题时，一定要注意系数 b_i 中，有一个为负，且所有 b_i 之和为负.

例 24 已知实数 a, b, c, d 满足条件 $a+b+c+d=1$，求函数 $y=8a^2+3b^2+2c^2-d^2$ 的最小值.

解 $\because$ $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{24}<0$，由(10.8)式有

$$y=\frac{a^2}{\frac{1}{8}}+\frac{b^2}{\frac{1}{3}}+\frac{c^2}{\frac{1}{2}}+\frac{d^2}{-1}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1}=-24.$$

当且仅当 $8a=3b=2c=-d$ 时等号成立．代入已知条件解得当 $a=-3$，$b=-8$，$c=-12$，$d=24$ 时，y 有最小值 -24．

例 25　实数 a，b，c 满足 $a^2-2b^2-4c^2=5$，试求函数 $y=2a+b-3c$ 的取值范围．

解　据不等式(10.8)有

$$-5=-a^2+2b^2+4c^2$$

$$=\frac{(2a)^2}{-4}+\frac{b^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(-3c)^2}{\frac{9}{4}}$$

$$\geqslant\frac{(2a+b-3c)}{-4+\frac{1}{2}+\frac{9}{4}}=\frac{y^2}{-\frac{5}{4}},$$

即
$$y^2\geqslant\frac{25}{4},$$

故
$$y\geqslant\frac{5}{2}\text{ 或 }y\leqslant-\frac{5}{2}.$$

例 26　在实数范围内解方程

$$\begin{cases}3x-y+z=-3,\\3x^2-2y^2-z^2=6.\end{cases}$$

解　由不等式(10.8)得

$$-3x^2+2y^2+z^2=(3x)^2/-3+(-y)^2\Big/\frac{1}{2}+z^2/1$$

$$\geqslant\frac{(3x-y+z)^2}{-3+\frac{1}{2}+1}=\frac{(-3)^2}{-\frac{3}{2}}=-6.$$

当且仅当

$$\frac{3x}{-3}=\frac{-y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{1}=\frac{-3}{-\frac{3}{2}}=2\text{ 时，即 } x=-2,\ y=-1,\ z$$

$=2$ 时，等号成立.

由第二个方程知 $-3x^2+2y^2+z^2=-6$，因而原方程组有唯一的一组解：

$$x=-2,\ y=-1,\ z=2.$$

例 27 若实数 a, b, c, d 满足

$$a-3b+4c+d=1,\ a^2+b^2-c^2+d^2=1,$$

试求出 d 的最大值与最小值.

解 据不等式(10.8)有

$$a^2+b^2-c^2=\frac{a^2}{1}+\frac{(-3b)^2}{9}+\frac{(4c)^2}{-16}$$

$$\geqslant\frac{(a-3b+4c)^2}{1+9-16}.$$

∵ $a^2+b^2-c^2=1-d^2$, $a-3b+4c=1-d$，则

$$1-d^2\geqslant\frac{(1-d)^2}{-6}.$$

当且仅当 $\frac{a}{1}=\frac{-3b}{9}=\frac{4c}{-16}=\frac{1-d}{-6}$ 时等号成立. 上述不等式整理得 $5d^2+2d-7\leqslant 0$，解得

$$-\frac{7}{5}\leqslant d\leqslant 1.$$

当 $a=b=c=0$ 时，d 有最大值 1.

当 $a=-\frac{2}{5}$, $b=\frac{6}{5}$, $c=\frac{8}{5}$ 时，d 有最小值 $-\frac{7}{5}$.

由以上几例可知，不等式(10.8)的应用是非常广泛的.

这里还要指出，不等式(10.8)可从指数的角度进行推广，

即对任意自然数 m，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{2m}}{b_i^{2m-1}}\geqslant\frac{A^{2m}}{B^{2m-1}}.$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时上式取等号.

显然，不等式(10.8)是上式取 $m=1$ 的特例．关于上式的证明及其应用这里不再赘述.

不等式(10.3)还可以推广为：

设 $a_i, b_i\in R^+$，$i=1, 2, \cdots, n$，$n\in N$，α，$\beta\in R^+$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+\beta}}{b_i^{\alpha}}\right)^{\beta}\geqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\alpha+\beta}}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}\right)^{\alpha}}. \tag{10.9}$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号.

证明　由加权平均不等式：

若 $x_1, x_2>0$，λ_1，$\lambda_2>0$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，则

$$x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2.$$

等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立．得

$$\begin{aligned}a_i^{\beta}b_i^{\alpha}&=(a_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot(b_i^{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\\&\leqslant\frac{\beta}{\alpha+\beta}a_i^{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}b_i^{\alpha+\beta},\end{aligned}$$

即

$$\frac{a_i^{\alpha+\beta}}{b_i^{\alpha}}\geqslant\frac{\alpha+\beta}{\beta}a_i^{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}b_i^{\beta},$$

$$\therefore\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+\beta}}{b_i^{\alpha}}\geqslant\frac{\alpha+\beta}{\beta}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}. \tag{10.10}$$

等号当且仅当 $a_i^{\alpha+\beta}=b_i^{\alpha+\beta}$ 即 $a_i=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 时成立.

特别地，用 $\left(\frac{a_i^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$，$\left(\frac{b_i^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ 代换(10.10)式中的 a_i，

b_i，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^\beta}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^\beta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}\cdot\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^\beta}{b_i^\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\geqslant\frac{\alpha+\beta}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\beta}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^\beta}-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^\beta}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^\beta}=1,$$

即
$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^\beta\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^\beta\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+\beta}}{b_i^\alpha}\geqslant1,$$

$$\therefore\quad\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+\beta}}{b_i^\alpha}\right)\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^\beta\right)^{\alpha+\beta}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^\beta\right)^{\alpha}}.$$

当且仅当$\left(a_i^\beta\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}=\left(b_i^\beta\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$，即

$$\frac{a_i}{b_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^\beta\Big/\sum_{i=1}^{n}b_i^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

时等号成立.

下列两例作为不等式(10.9)的应用.

例 28 设 θ, $\varphi\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $n\in R^+$, 且 $\sec^{n+2}\theta/\sec^n\varphi-\mathrm{tg}^{n+2}\theta/\mathrm{tg}^n\varphi=1$. 求证:

$$\sec^{n+2}\varphi/\sec^n\theta-\mathrm{tg}^{n+2}\varphi/\mathrm{tg}^n\theta=1.$$

证明 由(10.9)式得

$$\frac{\sec^{n+2}\theta}{\sec^n\varphi}=\frac{\mathrm{tg}^{n+2}\theta}{\mathrm{tg}^n\varphi}+\frac{1^{n+2}}{1^n}$$

$$\geqslant\left(\frac{(\mathrm{tg}^2\theta+1^2)^{n+2}}{(\mathrm{tg}^2\varphi+1^2)^n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sec^{n+2}\theta}{\sec^n\varphi}.$$

∴由(10.9)式取等号的条件知 $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\varphi$, $\sec\theta=\sec\varphi$, 故

$$\frac{\sec^{n+2}\varphi}{\sec^{n}\theta}-\frac{\operatorname{tg}^{n+2}\varphi}{\operatorname{tg}^{n}\theta}=\sec^{2}\varphi-\operatorname{tg}^{2}\varphi=1.$$

例29 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 为两两各不相等的正整数, $\alpha, \beta\in R^+$. 求证: 对任何自然数 n 都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^{\beta}}{k^{\alpha+\beta}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}.$$

(1978年第20届IMO试题5的推广)

证明 易证 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\beta}}$, 则由(10.9)式, 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^{\beta}}{k^{\alpha+\beta}}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{k^{\alpha+\beta}}}{\frac{1}{a_k^{\beta}}}\right)\\&\geqslant\left(\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\right)^{\alpha+\beta}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\beta}}\right)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant\left(\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\right)^{\alpha+\beta}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\right)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}.\end{aligned}$$

不等式(10.8)又可推广为:

设 $a_i, b_i\in R^+(i=1, 2, \cdots, n)$, $m, k\in N$, 且 $k>m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{k}}{b_i^{m}}\geqslant n^{1+m-k}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{k}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{m}}.\qquad(10.11)$$

为证(10.11)式, 先证下面的不等式:

设 $a_{ij}\in R^+(i=1, 2, \cdots, n, j=1, 2, \cdots, m)$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}\right)^{m}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i2}\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}a_{im}\right).\tag{10.12}$$

证明 由算术平均不等式，得

$$\sqrt[m]{\frac{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}{\left(\sum_{j=1}^{n}a_{j1}\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jm}\right)}}\leqslant\frac{1}{m}\left(\frac{a_{i1}}{\sum_{j=1}^{n}a_{j1}}+\cdots+\frac{a_{im}}{\sum_{j=1}^{n}a_{jm}}\right),$$

将以上 n 个不等式相加，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{\frac{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}{\left(\sum_{j=1}^{n}a_{j1}\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jm}\right)}}\leqslant 1,$$

$$\therefore\quad\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}\right)^{m}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i2}\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}a_{im}\right).$$

下面再来证不等式(10.11).

证明 由不等式(10.12)，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^m}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}\cdots\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}}_{(k-1)\text{个}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}b_i\cdots\sum_{i=1}^{n}b_i}_{m\text{个}}\underbrace{\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\text{个}}\cdots\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\text{个}}}_{(k-m-1)\text{个}}$$

$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m}\right)^{k-1}.$$

由以上两式得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^m}\geqslant n^{1+m-k}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^m}.\ \text{证毕.}$$

若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$, $0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 或 $0<a_1\leqslant a_2$

$\leqslant \cdots \leqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0$, r, $s \geqslant 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{b_i^s} \geqslant n^{1+s-r} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s}. \tag{10.13}$$

证明 由切比雪夫不等式, 得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{b_i^s} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^r \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i^s}. \tag{10.14}$$

又由幂平均不等式, 得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r \geqslant n^{1-r} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r, \tag{10.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i^s} \geqslant n^{1-s} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}\right)^s \geqslant \frac{n^{1+s}}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s}. \tag{10.16}$$

由(10.14)、(10.15)、(10.16), 得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{b_i^s} \geqslant n^{1+s-r} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s}.$$

作为(10.13)的推论有:

已知 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ 或 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0$, r, $s \geqslant 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^r b_i^s} \geqslant n^{1+s+r} \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s.$$

例 30 设 a, b, c, d 满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数. 求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

(1990 年第 31 届 IMO 备选题)

证明 $\because$ $ab+bc+cd+da=1$,

$\therefore \quad (a+c)(b+d)=1,$

$\therefore \quad a+b+c+d=(a+c)+(b+d)$

$$\geqslant 2\sqrt{(a+c)(b+d)}=2.$$

由(10.11)式，得

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

$$\geqslant \frac{4^{1+1-3}(a+b+c+d)^3}{3(a+b+c+d)}=\frac{1}{12}(a+b+c+d)^2$$

$$\geqslant \frac{1}{3}.$$

例 31 若 a, b, c 是三角形的三边长，且 $2p=a+b+c$，则 $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}p^{n-1}\quad(n\geqslant 1)$.

（1987 年第 28 届 IMO 备选题）

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $b+c\leqslant c+a\leqslant a+b$，于是由不等式(10.13)，得

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}$$

$$\geqslant \frac{3^{1+1-n}(a+b+c)^n}{2(a+b+c)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}p^{n-1}.$$

例 32 设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三条边长，p 为其半周长，$k\in N$. 求证：

$$\frac{b+c-a}{a^kA}+\frac{c+a-b}{b^kB}+\frac{a+b-c}{c^kC}\geqslant\frac{3^{1+k}(2p)^{1-k}}{\pi}.$$

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $b+c-a\leqslant c+a-b\leqslant a+b-c$，$a^kA\geqslant b^kB\geqslant c^kC$，于是由不等式(10.13)及不等式(10.12)，得

$$\frac{b+c-a}{a^k A}+\frac{c+a-b}{b^k B}+\frac{a+b-c}{c^k C}$$

$$=\frac{b+c-a}{(\sqrt[k+1]{a^k A})^{k+1}}+\frac{c+a-b}{(\sqrt[k+1]{b^k B})^{k+1}}+\frac{a+b-c}{(\sqrt[k+1]{c^k C})^{k+1}}$$

$$\geqslant\frac{3^{1+k+1-1}(a+b+c)}{(\sqrt[k+1]{a^k A}+\sqrt[k+1]{b^k B}+\sqrt[k+1]{c^k C})^{k+1}}$$

$$\geqslant\frac{3^{1+k}(a+b+c)}{\pi(a+b+c)^k}=\frac{3^{k+1}(2p)^{1-k}}{\pi}.$$

十一、柯西不等式的推广及其应用

在前面几节，我们已經讨论了柯西不等式的一些应用，在这里给出柯西不等式的推广以及它在解题中的应用.

设 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)\in R^+$，则

$$(a_{11}^n+a_{21}^n+\cdots+a_{m1}^n)(a_{12}^n+a_{22}^n+\cdots+a_{m2}^n)\cdots(a_{1n}^n+a_{2n}^n+\cdots+a_{mn}^n)$$
$$\geqslant(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}+a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}+\cdots+a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn})^n. \tag{11.1}$$

显然当 $n=2$ 时，(11.1)式就是柯西不等式，所以，我们把公式(11.1)称为推广了的柯西不等式.

证明　(11.1)式等价于

$$\sqrt[n]{a_{11}^n+a_{21}^n+\cdots+a_{m1}^n}\cdot\sqrt[n]{a_{12}^n+a_{22}^n+\cdots+a_{m2}^n}\cdots\cdot\sqrt[n]{a_{1n}^n+a_{2n}^n+\cdots+a_{mn}^n}\geqslant a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}+a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}+\cdots+a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}. \tag{11.2}$$

设
$$a_{11}^n+a_{21}^n+\cdots+a_{m1}^n=A_1^n,$$
$$a_{12}^n+a_{22}^n+\cdots+a_{m2}^n=A_2^n,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{1n}^n+a_{2n}^n+\cdots+a_{mn}^n=A_n^n.$$

于是(11.2)可以变为

$$A_1A_2\cdots A_n\geqslant a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}+a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}+\cdots+a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn},$$

即
$$\frac{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}}{A_1A_2\cdots A_n}+\frac{a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}}{A_1A_2\cdots A_n}+\cdots+\frac{a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}}{A_1A_2\cdots A_n}\leqslant 1. \tag{11.3}$$

下面证明(11.3)式是成立的.

$$\because \quad \frac{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}}{A_1A_2\cdots A_n} \leqslant \frac{\frac{a_{11}^n}{A_1^n}+\frac{a_{12}^n}{A_2^n}+\cdots+\frac{a_{1n}^n}{A_n^n}}{n}, \tag{11.4}$$

$$\frac{a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}}{A_1A_2\cdots A_n} \leqslant \frac{\frac{a_{21}^n}{A_1^n}+\frac{a_{22}^n}{A_2^n}+\cdots+\frac{a_{2n}^n}{A_n^n}}{n}, \tag{11.5}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}}{A_1A_2A_3\cdots A_n} \leqslant \frac{\frac{a_{m1}^n}{A_1^n}+\frac{a_{m2}^n}{A_2^n}+\cdots+\frac{a_{mn}^n}{A_n^n}}{n}. \tag{11.6}$$

将以上几个式子相加即得

$$\frac{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}}{A_1A_2\cdots A_n}+\frac{a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}}{A_1A_2\cdots A_n}+\cdots+\frac{a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}}{A_1A_2\cdots A_n}$$

$$\leqslant \frac{\frac{a_{11}^n+a_{21}^n+\cdots+a_{m1}^n}{A_1^n}+\cdots+\frac{a_{1n}^n+a_{2n}^n+\cdots+a_{mn}^n}{A_n^n}}{n}$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{个}1}}{n}=\frac{n}{n}=1,$$

所以(11.1)式得证.

不等式(11.1)中的指数 n 可以推广到满足一定条件的实数 s, 即

设 $a_{ij}>0(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$, s 为不小于 n 的实数, 则

$$(a_{11}^s+a_{21}^s+\cdots+a_{m1}^s)(a_{12}^s+a_{22}^s+\cdots+a_{m2}^s)$$
$$\cdots(a_{1n}^s+a_{2n}^s+\cdots+a_{mn}^s)$$
$$\geqslant m^{n-s}(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}+\cdots+a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}+\cdots$$
$$+a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn})^s. \tag{11.7}$$

证明 $\because \quad \frac{s}{n}\geqslant 1,$

$\therefore$

$$(a_{11}^s+a_{21}^s+\cdots+a_{m1}^s)(a_{12}^s+a_{22}^s+\cdots+a_{m2}^s)\cdots(a_{1n}^s+a_{2n}^s+\cdots+a_{mn}^s)$$

$$=[(a_{11}^{\frac{s}{n}})^n+(a_{21}^{\frac{s}{n}})^n+\cdots+(a_{m1}^{\frac{s}{n}})^n][(a_{12}^{\frac{s}{n}})^n+(a_{22}^{\frac{s}{n}})^n+\cdots+(a_{m2}^{\frac{s}{n}})^n]\cdots[(a_{1n}^{\frac{s}{n}})^n+(a_{2n}^{\frac{s}{n}})^n+\cdots+(a_{mn}^{\frac{s}{n}})^n]$$

$$\geqslant(a_{11}^{\frac{s}{n}}a_{12}^{\frac{s}{n}}\cdots a_{1n}^{\frac{s}{n}}+a_{21}^{\frac{s}{n}}a_{22}^{\frac{s}{n}}\cdots a_{2n}^{\frac{s}{n}}+\cdots+a_{m1}^{\frac{s}{n}}a_{m2}^{\frac{s}{n}}\cdots a_{mn}^{\frac{s}{n}})^n$$

$$=m^n\cdot\left[\frac{\left((a_{11}a_{12}\cdots a_{1n})^{\frac{s}{n}}+(a_{21}a_{22}\cdots a_{2n})^{\frac{s}{n}}+\cdots+(a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn})^{\frac{s}{n}}\right)}{m}\right]^n$$

$$\geqslant m^n\cdot\left[\left(\frac{\left(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}+a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}+\cdots+a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}\right)}{m}\right)^{\frac{s}{n}}\right]^n$$

$$=m^{n-s}(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}+a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}+\cdots+a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn})^s,$$

即

$$(a_{11}^s+a_{21}^s+\cdots+a_{m1}^s)(a_{12}^s+a_{22}^s+\cdots+a_{m2}^s)\cdots(a_{1n}^s+a_{2n}^s+\cdots+a_{mn}^s)\geqslant m^{n-s}(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}+a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}+\cdots+a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn})^s.$$

若 $n=2$, $s\geqslant 2$, 则(11.7)即为

$$(a_{11}^s+a_{21}^s+\cdots+a_{m1}^s)(a_{12}^s+a_{22}^s+\cdots+a_{m2}^s)\geqslant m^{2-s}(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{m1}a_{m2})^s.$$

若 $n=2$, $a_{12}=a_{22}=\cdots=a_{m2}=1$, $s\geqslant 2$, 则

$$a_1^s+a_2^s+\cdots+a_m^s\geqslant m^{1-s}(a_1+a_2+\cdots+a_m)^s.$$

若 $n=s$，则不等式(11.7)即为不等式(11.1)。

下面举例说明推广了的柯西不等式在解题中的应用。

例 1 设 $a\geqslant c,\ b\geqslant c,\ c\geqslant 0$，求证：

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leqslant\sqrt{ab}.$$

（《数学通讯》1986 年问题征解题）

证明 由(11.1)式，得

$$\begin{aligned}&\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\\&=\sqrt{c}\cdot\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}\cdot\sqrt{c}\\&\leqslant\sqrt{[c+(b-c)][(a-c)+c]}\\&=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

例 2 若 $p,\ q\in R^{+}$，且 $p^{3}+q^{3}=2$，

求证：$p+q\leqslant 2$。

证明 由(11.1)式，得

$$\begin{aligned}p+q&=1\cdot1\cdot p+1\cdot1\cdot q\\&\leqslant\sqrt[3]{(1^{3}+1^{3})(1^{3}+1^{3})(p^{3}+q^{3})}=2.\end{aligned}$$

从上述论证过程易知，此题可推广为：

若 $p,\ q\in R^{+}$，且 $p^{n}+q^{n}=2,\ n\in N,\ n\geqslant 2$，

求证：$p+q\leqslant 2$。

例 3 已知三个正数 a、b、c 成等差数列，公差不为零，求证：当 $1<n\in N$ 时，$a^{n}+c^{n}>2b^{n}$。

证明 由(11.1)式，有

$$\begin{aligned}2b^{n}&=2\left(\frac{a+c}{2}\right)^{n}\\&=\frac{1}{2^{n-1}}(\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\cdot a+\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\cdot c)^{n}\\&<\frac{1}{2^{n-1}}(1^{n}+1^{n})(1^{n}+1^{n})\cdots(1^{n}+1^{n})\\&\quad\cdot(a^{n}+c^{n})\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}\cdot(a^n+c^n),$$

即 $$2b^n<a^n+c^n.$$

例4 已知 a、b、$c\in R^+$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{(abc)^3}.$$

（《数学通报》1983年第7期问题241）

证明

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{(abc)^3}(a^2b^3c^3+a^3b^2c^3+a^3b^3c^2)$$

$$=\frac{1}{(abc)^3}(aacccbbb+bbaaaccc+ccbbbaaa)$$

$$\leqslant\frac{1}{(abc)^3}\sqrt[8]{(a^8+b^8+c^8)\cdots(a^8+b^8+c^8)}$$

$$=\frac{1}{(abc)^3}\sqrt[8]{(a^8+b^8+c^8)^8}$$

$$=\frac{a^8+b^8+c^8}{(abc)^3},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{(abc)^3}.$$

例5 已知 $a_i\in R^+(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，当 $m\in N$ 时，求证：

$$\sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明 由(11.1)知

$$(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)\underbrace{\overbrace{(1^m+1^m+\cdots+1^m)}^{n\text{个}}\cdots\overbrace{(1^m+1^m+\cdots+1^m)}^{n\text{个}}}_{(m-1)\text{个}}$$

$$\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m,$$

即 $$(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)n^{m-1}\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m,$$

$$\therefore \quad \frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m,$$

从而 $$\sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

例 6 已知 $a_i \in R^+ (i=1, 2, \cdots, n)$，$m \in N$，求证：

$$\sqrt[m+1]{\frac{a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1}}{n}} \geqslant \sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}}.$$

证明 由(11.1)式，得

$$\underbrace{(a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1})\cdots(a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1})}_{m\text{个}}$$

$$\cdot(1^m+1^m+\cdots+1^m) \geqslant (a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)^{m+1},$$

于是 $(a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1})^m \cdot n \geqslant (a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)^{m+1}$.

两边同除以 n^{m+1}，得

$$\left(\frac{a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1}}{n}\right)^m \geqslant \left(\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}\right)^{m+1},$$

$$\therefore \quad \sqrt[m+1]{\frac{a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1}}{n}} \geqslant \sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}}.$$

例 7 设 x, y, z 是正数，$x+y+z=\frac{3}{2}$，求证：$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) \geqslant \frac{125}{8}$，等号成立当且仅当 $x=y=z$.

（《数学通讯》1988 年第 6 期有奖问题征解）

这个不等式可以推广为：

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{n}{2}$，则

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \left(\frac{5}{2}\right)^n.$$

证明 易证函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in(0,\ 1)$ 内是单调递减函数. 又由已知条件得

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\\ &\geqslant\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\right)^n\\ &\geqslant\left(\frac{1}{2}+2\right)^n=\left(\frac{5}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

例 8 已知 α、β 为锐角,求证:

$$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\cos^3\beta+\cos^3\alpha\sin^3\beta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

证明 由(11.1)式,得

$$\begin{aligned}&(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\cos^3\beta+\cos^3\alpha\sin^3\beta)\\ &\quad\cdot(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\cos^3\beta+\cos^3\alpha\sin^3\beta)\\ &\quad\cdot(1^3+1^3+1^3)\\ &\quad\geqslant(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta)^3=1,\end{aligned}$$

即
$$(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\cos^3\beta+\cos^3\alpha\sin^3\beta)^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

$\because$ α、β 是锐角,

$$\therefore\quad\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\cos^3\beta+\cos^3\alpha\sin^3\beta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 9 已知 α, β 为锐角,求证:

$$\sin^{-3}\alpha+\cos^{-3}\alpha\cos^{-3}\beta+\cos^{-3}\alpha\sin^{-3}\beta\geqslant 9\sqrt{3}.$$

证明 由(11.1)式,得

$$\begin{aligned}&(\sin^{-3}\alpha+\cos^{-3}\alpha\cos^{-3}\beta+\cos^{-3}\alpha\sin^{-3}\beta)(\sin^{-3}\alpha\\ &\quad+\cos^{-3}\alpha\cos^{-3}\beta+\cos^{-3}\alpha\sin^{-3}\beta)(\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$+\cos^{3}\alpha\cos^{3}\beta+\cos^{3}\alpha\cdot\sin^{3}\beta)(\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta$$

$$+\cos^{2}\alpha\sin^{2}\beta)(\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta+\cos^{2}\alpha\sin^{2}\beta)$$

$$\geqslant[(\sqrt[5]{\sin^{-3}\alpha})^{2}(\sqrt[5]{\sin^{2}\alpha})^{3}+(\sqrt[5]{\cos^{-3}\alpha\cos^{-3}\beta})^{2}$$

$$\cdot(\sqrt[5]{\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta})^{3}+(\sqrt[5]{\cos^{-3}\alpha\sin^{-3}\beta})^{2}$$

$$\cdot(\sqrt[5]{\cos^{2}\alpha\sin^{2}\beta})^{3}]^{5},$$

即 $(\sin^{-3}\alpha+\cos^{-3}\alpha\cos^{-3}\beta+\cos^{-3}\alpha\sin^{-3}\beta)^{2}\cdot1^{3}\geqslant3^{5}$.

$\because$ α, β 是锐角,

$\therefore$ $\sin^{-3}\alpha+\cos^{-3}\alpha\cos^{-3}\beta+\cos^{-3}\alpha\sin^{-3}\beta\geqslant9\sqrt{3}$.

有兴趣的读者可以考虑如下问题:

若 α_1, α_2, $\cdots$, α_n 都是锐角, $n\in N$, 求

$$y=\cos^{k}\alpha_1+\sin^{k}\alpha_1\cos^{k}\alpha_2+\sin^{k}\alpha_2\cos^{k}\alpha_3+\cdots$$

$$+\sin^{k}\alpha_1\sin^{k}\alpha_2\cdots\sin^{k}\alpha_{n-2}\cos^{k}\alpha_{n-1}$$

$$+\sin^{k}\alpha_1\sin^{k}\alpha_2\cdots\sin^{k}\alpha_{n-2}\cdot\sin^{k}\alpha_{n-1}$$

($k=3$, 4, 5, $\cdots$ 或 $k=-1$, -2, -3, $\cdots$)的最小值.

例 10 若 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, $x_i\in R^{+}$, 那么

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

证明 $\because$ 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in(0,1)$ 内是单调递减函数, 又

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n},$$

$$\therefore\quad\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$\geqslant\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\right)^{n}$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{n}+n\right)^{n}=\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

此例许多书刊都探讨过其证明方法，但都较繁琐，上面的证法却相当简捷.

例 10 中的不等式可以推广为：

$a_i\in R^+(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，$k\in N$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^k+\frac{1}{a_i^k}\right)\geqslant\left(n^k+\frac{1}{n^k}\right)^n.$$

证明 由(11.1)式，得

$$\left(a_1^k+\frac{1}{a_1^k}\right)\left(a_2^k+\frac{1}{a_2^k}\right)\cdots\left(a_n^k+\frac{1}{a_n^k}\right)$$

$$\geqslant\left[(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})^k+\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\right)^k\right]^n,$$

又 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\dfrac{1}{n}$，

函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 是$[0, 1]$上的单调递减函数，

$$\therefore\quad(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})^k+\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\right)^k\geqslant n^k+\frac{1}{n^k},$$

故 $$\left(a_1^k+\frac{1}{a_1^k}\right)\left(a_2^k+\frac{1}{a_2^k}\right)\cdots\left(a_n^k+\frac{1}{a_n^k}\right)\geqslant\left(n^k+\frac{1}{n^k}\right)^n.$$

显然，当 $k=1$ 时，即为例 10 中的不等式.

例 11 设 $a_i\in R^+(i=1, 2, \cdots, n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，

求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_i}\right)^k\geqslant n^{k+1}\quad(k\in N)$.

证明 $$\left[\left(\frac{1}{a_1}\right)^k+\left(\frac{1}{a_2}\right)^k+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^k\right]\underbrace{(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)}_{k\text{个}}\geqslant\left[\left(\frac{1}{a_1}\right)(\sqrt[k]{a_1})^k+\left(\frac{1}{a_2}\right)\cdot(\sqrt[k]{a_2})^k+\left(\frac{1}{a_3}\right)(\sqrt[k]{a_3})^k+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)(\sqrt[k]{a_n})^k\right]^{k+1}=n^{k+1},$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\right)^{k}\geqslant n^{k+1}.$$

例 12 设 $a_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=k$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{k}{a_i}\right)^m\geqslant n\left(n+\frac{k}{n}\right)^m\quad(m\geqslant 1).$$

证明 由(11.1)式，得

$$(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)\underbrace{(1^n+1^n+\cdots+1^n)\cdots(1^n+1^n+\cdots+1^n)}_{(n-1)组}$$

$$\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n,$$

即
$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\geqslant m^{1-n}(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n,$$

因此，

$$\left(a_1+\frac{k}{a_1}\right)^m+\left(a_2+\frac{k}{a_2}\right)^m+\cdots+\left(a_n+\frac{k}{a_n}\right)^m$$
$$\geqslant n^{1-m}\left[\left(a_1+\frac{k}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{k}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{k}{a_n}\right)\right]^m$$
$$=n^{1-m}\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right.$$
$$\left.+k\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\right]^m$$
$$=n^{1-m}[k+k(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1})]^m$$
$$\geqslant n^{1-m}[k+kn^{1-(-1)}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{-1}]^m$$
$$=n^{1-m}(k+kn^2k^{-1})^m=n^{1-m}(k+n^2)^m$$
$$=n\left(n+\frac{k}{n}\right)^m.$$

当 $k=1$，$m=n=2$ 时，即为常见的不等式

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2\geqslant\frac{25}{2};$$

当 $k=1$，$m=2$，$n=3$，则

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\left(a_3+\frac{1}{a_3}\right)^2\geqslant\frac{100}{3}.$$

例 13 若 $a+b=1$，则 $a^n+b^n \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n \in N)$.

这道题的常用证法是数学归纳法，也有一种十分巧妙的方法，即

令 $\quad a=\frac{1}{2}+t,\quad b=\frac{1}{2}-t$，则

$$
\begin{aligned}
a^n+b^n &= \left(\frac{1}{2}+t\right)^n+\left(\frac{1}{2}-t\right)^n \\
&= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}t+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}t^2\right. \\
&\quad \left.+\cdots+t^n\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}t\right. \\
&\quad \left.+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}t^2+\cdots+(-1)^n t^n\right] \\
&\geqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

这个不等式若利用柯西不等式的推广形式来证，更显得简便：

$$
(a^n+b^n)\underbrace{(1^n+1^n)\cdots(1^n+1^n)}_{(n-1)\text{组}}
$$

$$
\geqslant(a\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{n-1\text{个}}+b\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{n-1\text{个}})^n=(a+b)^n=1,
$$

即 $$(a^n+b^n)\cdot2^{n-1}\geqslant1,$$

$$\therefore\quad a^n+b^n\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

当 $n=2, 4$ 时，即为常见的不等式：

若 $a+b=1$，则 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$；

若 $a+b=1$，则 $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

例 13 中的不等式还可以推广为:

若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, m, $n\in N$ 且 $m\geqslant 2$, 则

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\geqslant\frac{1}{m^{n-1}}.$$

读者利用柯西不等式的推广式容易证得.

例 14 设 $a>0$, $b>0$, $n\geqslant 3$, $n\in N$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, 则函数

$$y=\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x},$$

当 $x=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[n+2]{\frac{a}{b}}$ 时, 有最小值

$$y_{\min}=\sqrt{\left(\sqrt[n+2]{a^2}+\sqrt[n+2]{b^2}\right)^{n+2}}.$$

证明 $\quad\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{n+2}$

$$=\Bigg[\sqrt[n+2]{\frac{a}{\sin^n x}}\cdot\sqrt[n+2]{\frac{a}{\sin^n x}}\cdot\underbrace{\sqrt[n+2]{\sin^2 x}\cdot\sqrt[n+2]{\sin^2 x}\cdots\sqrt[n+2]{\sin^2 x}}_{n\text{个}}$$

$$+\sqrt[n+2]{\frac{b}{\cos^n x}}\cdot\sqrt[n+2]{\frac{b}{\cos^n x}}\cdot\underbrace{\sqrt[n+2]{\cos^2 x}\cdot\sqrt[n+2]{\cos^2 x}\cdots\sqrt[n+2]{\cos^2 x}}_{n\text{个}}\Bigg]^{n+2}$$

$$\leqslant\left(\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\right)\left(\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\right)$$

$$\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdots(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$=\left(\frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\right)^2,$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin^n x}+\frac{b}{\cos^n x}\geqslant\left(a^{\frac{2}{n+2}}+b^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}. \tag{11.8}$$

由
$$\sqrt[n+2]{\frac{a}{\sin^n x}}\Big/\sqrt[n+2]{\sin^2 x}$$
$$=\sqrt[n+2]{\frac{b}{\cos^n x}}\Big/\sqrt[n+2]{\cos^2 x},$$

得
$$\frac{a}{\sin^{n+2} x}=\frac{b}{\cos^{n+2} x},$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

即当且仅当 $x=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[n+2]{\dfrac{a}{b}}$ 时，(11.8)式中取等号.

则
$$y_{\min}=\sqrt{\left(\sqrt[n+2]{a^2}+\sqrt[n+2]{b^2}\right)^{n+2}}.$$

例15 若 $a_i>0$, $\lambda_i>0(i=1, 2, \cdots, m)$, $s\geqslant1$, $r\geqslant2$, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_m=A$, $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m=t^m$, 求证:

$$\left(a_1^s+\frac{\lambda_1}{a_1^s}\right)^r+\left(a_2^s+\frac{\lambda_2}{a_2^s}\right)^r+\cdots+\left(a_m^s+\frac{\lambda_m}{a_m^s}\right)^r$$
$$\geqslant m\left[\left(\frac{A}{m}\right)^s+\left(\frac{m}{A}\right)^s t\right]^r.$$

证明 由(11.7)式及幂平均不等式，得

若 $\alpha\geqslant\beta>0$, $a_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

得
$$\left(a_1^s+\frac{\lambda_1}{a_1^s}\right)^r+\left(a_2^s+\frac{\lambda_2}{a_2^s}\right)^r+\cdots+\left(a_m^s+\frac{\lambda_m}{a_m^s}\right)^r$$
$$\geqslant m^{1-r}\left[a_1^s+\frac{\lambda_1}{a_1^s}+a_2^s+\frac{\lambda_2}{a_2^s}+\cdots+a_m^s+\frac{\lambda_m}{a_m^s}\right]^r$$

$$=m\left[\frac{a_1^s+a_2^s+\cdots+a_m^s}{m}+\frac{\frac{\lambda_1}{a_1^s}+\frac{\lambda_2}{a_2^s}+\cdots+\frac{\lambda_m}{a_m^s}}{m}\right]^r$$

$$\geqslant m\left[\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\right)^s+\frac{\sqrt[m]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}}{\sqrt[m]{a_1^s a_2^s\cdots a_m^s}}\right]^r$$

$$\geqslant m\left[\left(\frac{A}{m}\right)^s+\frac{\sqrt[m]{t^m}\cdot m^s}{(a_1+a_2+\cdots+a_m)^s}\right]^r$$

$$=m\left[\left(\frac{A}{m}\right)^s+\left(\frac{m}{A}\right)^s t\right]^r.$$

例16 P为$\triangle ABC$内一点，AP、BP、CP分别与BC、AC、AB交于M、N、R，若$AP^s+BP^s+CP^s=a$，$2\leqslant r\leqslant s$，

求证：

$$\frac{1}{PM^r}+\frac{1}{PN^r}+\frac{1}{PR^r}\geqslant 3\cdot 2^r\cdot\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

证明 $\because$
$$\frac{AP}{PM}=\frac{\triangle ABP}{\triangle PBM}=\frac{\triangle ACP}{\triangle PCM}$$
$$=\frac{\triangle ABP+\triangle ACP}{\triangle PBM+\triangle PCM}$$
$$=\frac{\triangle ABC-\triangle BPC}{\triangle BPC}$$
$$=\frac{\triangle ABC}{\triangle BPC}-1.$$

（此处$\triangle ABC$表示$\triangle ABC$的面积，其余类似。）

同理可证

$$\frac{BP}{PN}=\frac{\triangle ABC}{\triangle APC}-1,\quad \frac{CP}{PR}=\frac{\triangle ABC}{\triangle APB}-1,$$

$$\therefore\ \frac{AP}{PM}+\frac{BP}{PN}+\frac{CP}{PR}$$
$$=\triangle ABC\left(\frac{1}{\triangle PBC}+\frac{1}{\triangle APC}+\frac{1}{\triangle APB}\right)-3$$

$$\geqslant \triangle ABC\left(\frac{3^2}{\triangle PBC+\triangle APC+\triangle APB}\right)-3$$

$$=\frac{9\triangle ABC}{\triangle ABC}-3=6.$$

另外，由于$2\leqslant r\leqslant s$，

$$\therefore\quad AP^r+BP^r+CP^r\leqslant 3\cdot\left(\frac{AB^s+BP^s+CP^s}{3}\right)^{\frac{r}{s}}$$

$$=3^{1-\frac{r}{s}}\cdot a^{\frac{r}{s}},$$

故
$$(AP^r+BP^r+CP^r)\left(\frac{1}{PM^r}+\frac{1}{PN^r}+\frac{1}{PR^r}\right)$$

$$\geqslant 3^{2-r}\left(\frac{AP}{PM}+\frac{BP}{PN}+\frac{CP}{PR}\right)^r$$

$$\geqslant 3^{2-r}\cdot 6^r=3^2\cdot 2^r,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{PM^r}+\frac{1}{PN^r}+\frac{1}{PR^r}\geqslant\frac{3^2\cdot 2^r}{AP^r+BP^r+CP^r}$$

$$\geqslant\frac{3^2\cdot 2^r}{3^{1-\frac{r}{s}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=3\cdot 2^r\cdot\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

十二、排序原理

1. 一个排序问题

1978 年全国高中数学竞赛有这样一道试题:

设有 10 人各拿提桶一只同到水龙头前打水,设水龙头注满第 i ($i=1, 2, \cdots, 10$)个人的提桶需时 T_i 分钟, 假定这些 T_i 各不相同,问:

(i) 当只有一个水龙头可用时, 应如何安排这 10 个人的次序,使他们的总的花费时间(包括各人自己接水所花的时间)最少?最少时间等于多少?

(ii) 当有两个水龙头可用时,应如何安排这十个人的次序,使他们的总的花费时间最少?最少时间等于多少?(须证明你的论断)

我们把水桶从小到大编号, 最小的是 1 号, 最大的是 10 号. 注满 1 号水桶所需的时间设为 t_1, 注满 2 号水桶所需的时间设为 t_2, ……,那么,显然有

$$t_1<t_2<\cdots<t_{10}.$$

假设按从小到大的次序安排打水. 第 1 号水桶在打水时, 10 个人都需要等 t_1 分钟,总共是 $10t_1$ 分钟; 第 2 号水桶打水时, 9 个人都需要等 t_2 分钟,总共是 $9t_2$ 分钟; 继续下去, 到第 10 号水桶打水时,只有他一人在等, 需要 t_{10} 分钟. 因此, 10 只水桶都打满水时,总的花费时间为

$$T=10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10}. \qquad (12.1)$$

今设另一种次序是第 i_1 号桶先打,接着是第 i_2 号,……,

一直到第 i_{10} 号桶．这里$(i_1, i_2, \cdots, i_{10})$是$(1, 2, \cdots, 10)$的任意一个排列．和上面的讨论一样，在这种安排下，10人所花费的总时间为

$$T' = 10t_{i_1} + 9t_{i_2} + \cdots + 2t_{i_9} + t_{i_{10}}. \qquad (12.2)$$

$$\because \quad t_{i_1}+t_{i_2}+\cdots+t_{i_{10}} = t_1+t_2+\cdots+t_{10},$$

$$t_{i_1}+t_{i_2}+\cdots+t_{i_9} \geqslant t_1+t_2+\cdots+t_9,$$

$$\cdots\cdots$$

$$t_{i_1}+t_{i_2} \geqslant t_1+t_2,$$

$$t_{i_1} \geqslant t_1.$$

把这10个式子两边分别相加，即得 $T'>T$.

所以，按 t_i 从小到大的次序安排，总的花费时间最少．

上面的结论，可以推广到更一般的情形，也就是下面我们所要证明的排序原理．

2．排序原理及其推论

定义 设有两组实数 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的任一个排列，我们称 $S=\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$ 为这两组实数的同序积之和；$\bar{S}=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$ 称为这两组实数的倒序积之和；$S_1=a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$ 称为这两组实数的乱序积之和．则有

排序原理 I 设有两组实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，且 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的任一个排列，则

$$\bar{S}\leqslant S_1\leqslant S.$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立．

证明 首先，因给定的数组 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的排列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 只有有限种，故不同的 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ic_i$ 也只有有限个，它们当中

必有最大值和最小值.

设 $i>j$, $c_i \geqslant c_j$, 现在来比较两个和数:

$$S_1 = a_1c_1 + \cdots + a_jc_j + \cdots + a_ic_i + \cdots + a_nc_n,$$

$$S' = a_1c_1 + \cdots + a_jc_i + \cdots + a_ic_j + \cdots + a_nc_n,$$

这里 S' 是由调换 S_1 中 c_i 和 c_j 的位置而得到的.

$$\because \quad S_1 - S' = a_jc_j + a_ic_i - a_jc_i - a_ic_j$$

$$= (c_i - c_j)(a_i - a_j) \geqslant 0,$$

$$\therefore \quad S_1 \geqslant S'.$$

由此可见, 和数 S_1 中, 最大的和数所对应的情况只能是数组 b_i 按小到大的顺序排列, 而最小的和数只能是数组 b_i 按大到小的顺序排列. 这就是所要证明的不等式.

应该指出, 这里确定和数 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ic_i$ 的最大(小)值的存在是十分必要的.

推论 对于实数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, 设 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ 是它的任意一个排列, 则

$$a_1a_{i_1} + a_2a_{i_2} + \cdots + a_na_{i_n} \leqslant a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

证明 不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 取 $b_k = a_k$ ($k=1, 2, \cdots, n$), 则 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 且 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的某种排列. 由排序原理 I 得

$$a_1a_{i_1} + a_2a_{i_2} + \cdots + a_na_{i_n}$$

$$\leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

3. 排序原理与一些重要不等式

利用排序原理, 可以毫不困难地证明包括某些著名不等式在内的许多不等式. 下面举几例予以说明.

例 1(算术-几何平均不等式) 设 $x_i>0$ ($i=1, 2, \cdots,$

n)，则 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$．其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立．

证明　我们构造两个数列：

$$a_1=\frac{x_1}{c},\quad a_2=\frac{x_1x_2}{c^2},\quad a_3=\frac{x_1x_2x_3}{c^3},\quad\cdots,\quad a_n=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{c^n}=1,$$

$$b_1=\frac{1}{a_1},\quad b_2=\frac{1}{a_2},\quad b_3=\frac{1}{a_3},\quad\cdots,\quad b_n=\frac{1}{a_n}=1.$$

∵　两个数列中的数互为倒数，所以和数：$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 不大于 $a_1b_n+a_2b_1+a_3b_2+\cdots+a_nb_{n-1}$，

即
$$1+1+\cdots+1\leqslant\frac{x_1}{c}+\frac{x_2}{c}+\cdots+\frac{x_n}{c},$$

$$n\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{c},$$

$$\therefore\quad c\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

即
$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，或

$$\frac{x_1}{c}=\frac{x_1\cdot x_2}{c^2}=\frac{x_1}{c}\cdot\frac{x_2}{c}\cdot\frac{x_3}{c}=\cdots=\frac{x_1}{c}\cdot\frac{x_2}{c}\cdots\frac{x_n}{c}=1$$

时成立，此时 $x_1=x_2=\cdots=x_n=c$．

例 2（切比雪夫不等式）　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$；$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为任意两组实数．

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right);\qquad(12.3)$$

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 而 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 而 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{12.4}$$

上述两式中的等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立。

证明 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$b_1, b_2, \cdots, b_n$

是两个有相同次序的序列，由排序原理Ⅰ得

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_nb_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}.$$

把上述 n 个式子相加，得

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),$$

上式两边同除以 n^2，得

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立。

同理可证(12.4)式。

例3(算术-调和平均不等式)．设 $x_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}.$$

其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立。

证明 不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n > 0$，则

$$\frac{1}{x_1} \leqslant \frac{1}{x_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{x_n},$$

故由(12.4)知

$$1=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\frac{1}{x_i}\right)\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right),$$

于是
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\geqslant n\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}.$$

且由(12.4)中等号成立的条件知其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

例 4(算术-均方根不等式) 设 a_i 为实数，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，于是由(12.3)知

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i a_i\right)\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right),$$

从而有
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

且由(12.3)中等号成立的条件知其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

例 5(柯西不等式) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为正实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 成立。

证明 不失一般性，可设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是有相反次序的正数序列，则由(12.4)知

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

又因为算术平均值不大于平方平均值，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i\leqslant\frac{1}{n}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{n\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

即
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

从上面的例子可知，许多重要的不等式都可以用排序原理Ⅰ获得简单的证明．论证的关键是根据问题的条件和结论构造恰当的序列．如何排好这个序列，其技巧性较高，排得好事半功倍，排得不好则“此路不通”．

4．排序原理Ⅰ的推广

作为排序原理Ⅰ的推广，我们有：

排序原理II　设有两组正数：

(1) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$;　　(2) $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.

(1)与(2)一对一地作幂 $a_i^{b_i}$，然后相乘，则同序时的积最大，倒序时的积最小．即

$$a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdots a_n^{b_n} \geqslant a_1^{b_{i_1}} \cdot a_2^{b_{i_2}} \cdots a_n^{b_{i_n}} \geqslant a_1^{b_n} \cdot a_2^{b_{n-1}} \cdots a_n^{b_1},$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是1, 2, …, n 的一个排列．

证明　由条件显然有

$\ln a_1 \leqslant \ln a_2 \leqslant \cdots \leqslant \ln a_n$，又 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，由排序原理Ⅰ，知

$b_1 \ln a_1 + b_2 \ln a_2 + \cdots + b_n \ln a_n \geqslant b_{i_1} \ln a_1 + b_{i_2} \ln a_2 + \cdots + b_{i_n} \ln a_n \geqslant b_n \ln a_1 + b_{n-1} \ln a_2 + \cdots + b_1 \ln a_n$，即

$$a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdots a_n^{b_n} \geqslant a_1^{b_{i_1}} \cdot a_2^{b_{i_2}} \cdots a_n^{b_{i_n}} \geqslant a_1^{b_n} \cdot a_2^{b_{n-1}} \cdots a_n^{b_1}$$

等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时成立．

排序原理III　设有 m 组非负数

$$a_{k1} \leqslant a_{k2} \leqslant \cdots \leqslant a_{kn} (k=1, 2, \cdots, n),$$

从每组中取出一数相乘，再从剩下的数中每组取出一个数相乘，如此进行下去，一直到 n 次取完为止，然后相加，所得诸和

中以

$$a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$$

为最大.

证明　考虑两项

$$a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdots a_{mi_m} \text{ 与 } a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots a_{mj_m}.$$

不妨设 $a_{1i_1}\leqslant a_{1j_1}$, $a_{2i_2}\leqslant a_{2j_2}$, …, $a_{ki_k}\leqslant a_{kj_k}$, $a_{k+1i_{k+1}}\geqslant a_{k+1j_{k+1}}$, …, $a_{mi_m}\geqslant a_{mj_m}$. 于是

$$a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}\leqslant a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots a_{kj_k},$$

$$a_{k+1i_{k+1}}\cdots a_{mi_m}\geqslant a_{k+1j_{k+1}}\cdots a_{mj_m}.$$

由排序原理 1, 有

$$a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}\cdot a_{k+1j_{k+1}}\cdots a_{mj_m}+a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}\cdot a_{k+1i_{k+1}}\cdots a_{mi_m}$$

$$\geqslant a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}+a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots a_{mj_m},$$

即在此两项中把倒序改为同序后和不减少　经有限次改变后必可使 n 项中任何两项均无倒序, 此和变为 $a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$. 因若不然, 则必还有两项有倒序存在. 又每次改变和不减少, 所以

$$a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$$

为最大.

排序原理 IV　设有两组非负数:

(1) $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$; (2) $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$.

$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的任一排列, 则

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)\leqslant(a_{i_1}+b_1)(a_{i_2}+b_2)\cdots(a_{i_n}+b_n)\leqslant(a_n+b_1)(a_{n-1}+b_2)\cdots(a_1+b_n).$$

证明　若 $a_i\leqslant a_j$, $b_i\leqslant b_j$, 则

$$(a_i+a_j)(a_j+b_i)-(a_i+b_i)(a_j+b_j)$$

$$=(a_j-a_i)(b_j-b_i)\geqslant 0,$$

可见在 i 和 j 的两个位置上将倒序改为同序乘积不增大, 由

此即可证得原理 IV.

排序原理 V 设有 m 组非负数：

$$a_{k1}\leqslant a_{k2}\leqslant\cdots\leqslant a_{kn}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

从每组中取出一数相加，再从剩下的数中每组取出一数相加，如此进行下去，直到 n 次取完为止，然后相乘，所得诸乘积中，以

$$(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})\cdots$$
$$(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn})\qquad(12.5)$$

为最小.

证明 考虑 $(a_{1i_1}+a_{2i_2}+\cdots+a_{mi_m})$ 与 $(a_{1j_1}+a_{2j_2}+\cdots a_{mj_m})$，不妨设 $a_{1i_1}\leqslant a_{1j_1}$，$a_{2i_2}\leqslant a_{2j_2}$，$\cdots$，$a_{ki_k}\leqslant a_{kj_k}$，$a_{k+1i_{k+1}}\geqslant a_{k+1j_{k+1}}$，$\cdots$，$a_{mi_m}\geqslant a_{mj_m}$，于是

$$a_{1i_1}+a_{2i_2}+\cdots+a_{ki_k}\leqslant a_{1j_1}+a_{2j_2}+\cdots+a_{kj_k},$$

$$a_{k+1i_{k+1}}+\cdots+a_{mi_m}\geqslant a_{k+1j_{k+1}}+\cdots+a_{mj_m}.$$

由原理 IV，则 $(a_{1i_1}+a_{2i_2}+\cdots+a_{ki_k}+a_{k+1,j_{k+1}}+\cdots+a_{mj_m})(a_{1j_1}+a_{2j_2}+\cdots+a_{kj_k}+a_{k+1,i_{k+1}}+\cdots+a_{mi_m})\leqslant(a_{1i_1}+a_{2i_2}+\cdots+a_{mi_m})(a_{1j_1}+a_{2j_2}+\cdots+a_{mj_m})$

可见，在此两因子中把倒序改为同序后乘积不增大，经过有限次改变后必可使 n 个因子中任意两因子均无倒序，此乘积变为所要证的结论，因若不然，必有两因子有倒序存在. 又每次改变乘积不增大，故(12.5)式为最小.

为了讨论下面的乘幂形式的排序原理，我们先来看两个命题.

命题 1 若 $a,\ b\in R$，且 $e<a<b$，其中 e 是自然对数的底，记 $x_1^{x_2}=[x_1,\ x_2]$，求证：

$$[a,\ b]>[b,\ a].$$

证明 ∵ 当 $x\geqslant e$ 时，函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 是减函数，∴ 当 e

$<a<b$ 时，有 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$，即 $[a, b]>[b, a]$.

命题 2 若 $a, b, c\in R$，且 $e<a<b<c$，记 $x_1^{x_2^{x_3}}=[x_1, x_2, x_3]$，求证：$[a, b, c]>[c, b, a]$.

证明 由题设及命题 1，由 $[b, c]>[c, b]$，有 $[a, b^c]>[a, c^b]$，即 $[a, b, c]>[a, c, b]$；

由 $[a, b]>[b, a]$，有 $[c, a, b]>[c, b, a]$；

由 $[a, b]<[c, b]$，有 $[a^b, c^b]>[c^b, a^b]$，亦有 $[a, c^b]>[c, a^b]$，即 $[a, c, b]>[c, a, b]$.

故 $[a, b, c]>[a, c, b]>[c, a, b]>[c, b, a]$.

排序原理 VI 若正实数 a_i $(i=1, 2, \cdots, n, n\geqslant 2)$ 满足 $e<a_1<a_2<\cdots<a_n$. 集合 $S=\{[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}]$：$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列$\}$中，元素的值以 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 为最大（顺序幂最大）；以 $[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1]$ 为最小（逆序幂最小），其中

$$x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

证明 由命题 2 易得

$$\begin{aligned}&[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, \cdots, a_{i_n}]\\&\quad>[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+2}}, \cdots, a_{i_n}],\end{aligned}$$

其中 $a_{i_k}<a_{i_{k+1}}$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$，也就是说，当 $[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}]$ 中的相邻两数左小右大时，对调这两数，便使得整个乘幂的值减小. 既然如此，我们总可以将 $[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}]$ 中最小的数 a_1 通过与相邻数对调而一步步挪到最右，同时使整个乘幂的值不断减小. 同理，我们继续挪动 $a_2, a_3, \cdots$，终于得到

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}]\geqslant[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1].$$

上式中等号当且仅当 $a_{i_1}=a_n, \cdots, a_{i_n}=a_1$ 成立. 类似可证

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}] \leqslant [a_1, a_2, \cdots, a_n],$$

此式等号当且仅当 $a_{i_1}=a_1, \cdots, a_{i_n}=a_n$ 成立.

运用原理 VI, 我们可以编写如下有关年号的趣题:

用年号的四个数码构成形如 $a^{b^{c^d}}$ 的数,

并使其值最大.(参见 1985 年上海市中学数学竞赛试题)

5. 排序原理的应用举例

排序原理的基本思想是非常简单明了, 就像抽屉原则一样, 几乎是人人都懂, 但它却是论证不等式的重要工具之一. 下面举例予以说明.

例 1 假设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的某一排列, 证明 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant n$. (1985 年匈牙利数学竞赛试题)

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$, 则

$$\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{1}{a_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{a_n},$$

注意到 $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}$ 是 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ 的一个排列, 故由排序原理 I 得

$$n=a_1\cdot\frac{1}{a_1}+a_2\cdot\frac{1}{a_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{a_n}$$

$$\leqslant a_1\cdot\frac{1}{b_1}+a_2\cdot\frac{1}{b_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{b_n},$$

即
$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

例 2 已知 $a, b, c\in R^+$, 求证

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

(高中代数第二册 P95 第 13 题)

证明　不妨设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$，则

$$\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{c},\ bc \leqslant ca \leqslant ab.$$

由排序原理得

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant \frac{bc}{c}+\frac{ca}{a}+\frac{ab}{b},$$

即
$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc} \geqslant a+b+c,$$

也即
$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c} \geqslant abc.$$

例3　已知 a、b、$c \in R^+$，且两两不等，求证：

$$2(a^3+b^3+c^3) > a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

（高中代数第二册 P112 第5题）

证明　不妨设 $a > b > c$，则 $a^2 > b^2 > c^2$，又 $b+c < a+c < a+b$，

$$\therefore\ a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b) \leqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)(2a+2b+2c)}{3}.$$

又 a^2，b^2，c^2 与 a，b，c 同序，

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3 \geqslant (a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{a+b+c}{3},$$

即
$$2(a^3+b^3+c^3) \geqslant \frac{2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{3}.$$

$$\therefore\ 2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

例4　求证：

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta) \geqslant 6.$$

证明　不妨设 $\frac{\pi}{2} > \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma > 0$，$\because \operatorname{tg}\alpha \geqslant \operatorname{tg}\beta \geqslant \operatorname{tg}\gamma >$

0，且 $\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\geqslant\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta>0$，由切比雪夫不等式，得

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha)\\&\quad+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\\&\geqslant(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)\cdot\frac{2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}{3}\\&\geqslant3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}\cdot2\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}\\&=6.\end{aligned}$$

例 5 设 a, b, c 是正实数，求证：

$$a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

证明 由于不等式是关于 a, b, c 对称的，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，于是

$$a^2\geqslant b^2\geqslant c^2,\ \frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{a}.$$

由排序不等式，得

$$a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}\leqslant a^2\cdot\frac{1}{b}+b^2\cdot\frac{1}{c}+c^2\cdot\frac{1}{a},$$

$$a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}\leqslant a^2\cdot\frac{1}{c}+b^2\cdot\frac{1}{a}+c^2\cdot\frac{1}{b}.$$

将以上两式相加得

$$2(a+b+c)\leqslant\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b},$$

即 $$a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}.$$

为了证明后一个不等式，再考虑数组

$$a^3\geqslant b^3\geqslant c^3,\ \frac{1}{bc}\geqslant\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{ab}.$$

由排序不等式，得

$$a^3\cdot\frac{1}{bc}+b^3\cdot\frac{1}{ca}+c^3\cdot\frac{1}{ab}\geqslant a^3\cdot\frac{1}{ca}+b^3\cdot\frac{1}{ab}+c^3\cdot\frac{1}{bc},$$

$$a^3\cdot\frac{1}{bc}+b^3\cdot\frac{1}{ca}+c^3\cdot\frac{1}{ab}\geqslant a^3\cdot\frac{1}{ab}+b^3\cdot\frac{1}{bc}+c^3\cdot\frac{1}{ca}.$$

将以上两个不等式相加再除以 2，得

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

例 6 已知 $a>0$, $b>0$, $c>0$, 求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

（1983 年《数学通报》第 7 期问题）

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$, 则

$$\frac{1}{bc}\geqslant\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{ab},$$

故

$$\begin{aligned}\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}&=\frac{a^5}{b^3c^3}+\frac{b^5}{c^3a^3}+\frac{c^5}{a^3b^3}\\&\geqslant\frac{a^5}{c^3a^3}+\frac{b^5}{a^3b^3}+\frac{c^5}{b^3c^3}\\&=\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\\&\geqslant\frac{a^2}{a^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{b^3}\\&\geqslant\frac{a^2}{a^3}+\frac{b^2}{b^3}+\frac{c^2}{c^3}\\&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.\end{aligned}$$

上面证明过程中三次用到了排序原理.

例 7 已知 a, b, $c>0$, 求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}. \qquad (12.6)$$

（1963 年莫斯科数学竞赛试题）

证明　∵ (12.6)式左边是 a, b, c 的轮换对称式，∴ 不妨设 $a \geqslant b,\ a \geqslant c$.

若 $a \geqslant b \geqslant c$，则 $a+b \geqslant a+c \geqslant b+c$，由排序原理得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b},$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{c}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{a}{a+b},$$

两式相加即得(12.6)式.

若 $a \geqslant c \geqslant b$，则 $a+c \geqslant a+b \geqslant c+b$，以上证明过程仍然成立.

例 8　设 $x>0$，求证：

$$1+x+x^2+\cdots+x^{2n} \geqslant (2n+1)x^n.$$

证明　正序列 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 与 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 有相同的次序，正序列 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 与 $x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1$ 有相反次序，而序列 $x, x^2, \cdots, x^n, 1$ 是序列 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 的一个排序．所以

$$1^2+x^2+x^4+\cdots+x^{2n} \geqslant 1\cdot x^n+x\cdot x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}\cdot x+x^n\cdot 1,$$

即

$$1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n} \geqslant (n+1)x^n. \tag{12.7}$$

又

$$1\cdot x+x\cdot x^2+\cdots+x^{n-1}\cdot x^n+x^n\cdot 1$$
$$\geqslant 1\cdot x^n+x\cdot x^{n-1}+\cdots+x^n\cdot 1,$$

即

$$x+x^3+\cdots+x^{2n-1}+x^n \geqslant (n+1)x^n,$$

即

$$x+x^3+\cdots+x^{2n-1} \geqslant nx^n. \tag{12.8}$$

(12.7)与(12.8)两式相加，得

$$1+x+x^2+\cdots+x^{2n} \geqslant (2n+1)x^n.$$

例 9　用 A、B、C 表示 $\triangle ABC$ 的三个内角的弧度数，a, b, c 表示其对边，求证：

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

证明 显然，序列 a, b, c 与序列 A, B, C 有相同的次序，得

$$aA+bB+cC=aA+bB+cC,$$

$$aA+bB+cC \geqslant bA+cB+aC,$$

$$aA+bB+cC \geqslant cA+aB+bC.$$

以上三式相加，得

$$3(aA+bB+cC) \geqslant (a+b+c)(A+B+C)=(a+b+c)\pi,$$

即
$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

例 10 设 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 都是正数，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1} \geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

（1984 年全国高中数学联赛试题）

证明 考虑到两个正数序列 x_i^2 和 $\frac{1}{x_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 有相反的大小次序，于是对 $\frac{1}{x_i}$ 的一个排列 $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$, $\cdots$, $\frac{1}{x_n}$, $\frac{1}{x_1}$，由排序原理，得

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}$$

$$\geqslant x_1^2 \cdot \frac{1}{x_1}+x_2^2 \cdot \frac{1}{x_2}+\cdots+x_n^2 \cdot \frac{1}{x_n},$$

即
$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1} \geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

利用上述证法，可得更一般的结论：

设 x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是正数，y_i 是 x_i 的任一排列，且 $\alpha>0$, $\beta>0$，那么

$$\frac{x_1^\alpha}{y_1^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{y_2^\beta}+\cdots+\frac{x_n^\alpha}{y_n^\beta}\geqslant x_1^{\alpha-\beta}+x_2^{\alpha-\beta}+\cdots+x_n^{\alpha-\beta}.$$

例 11 若 a, b, c 表示 $\triangle ABC$ 三条边的长度, S 表示其面积, 则 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S$.

(1961 年第 3 届 IMO 试题)

证明 $\because$ b^2, c^2, a^2 是 a^2, b^2, c^2 的一个排列, $\therefore$ 由排序原理的推论, 得

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leqslant a^4+b^4+c^4,$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$

$$\geqslant 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

$$\therefore\quad \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\leqslant\frac{1}{3}.$$

$$\because\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $$p=\frac{a+b+c}{2},$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{\frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}-1}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{\frac{4}{3}-1}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

当且仅当 $a^2=b^2=c^2$ 即 $a=b=c$ 时, 等号成立.

例 12 设 a, b, c 为某一三角形三条边长, 求证:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

(1964 年第 6 届 IMO 试题)

证明 不妨设

$$a\geqslant b\geqslant c,\qquad (12.9)$$

则 $\quad c(a+b-c)-b(a+c-b)$

$$=ac+bc-c^2-ab-bc+b^2$$
$$=b^2-c^2+ac-ab$$
$$=(b+c)(b-c)-a(b-c)$$
$$=(b-c)(b+c-a)\geqslant 0,\ (\because b-c\geqslant 0,\ b+c-a>0)$$

即
$$c(a+b-c)\geqslant b(a+c-b).$$

同理可证 $\quad b(a+c-b)\geqslant a(b+c-a)$,

即

$$c(a+b-c)\geqslant b(a+c-b)\geqslant a(b+c-a). \tag{12.10}$$

由(12.9)、(12.10),根据排序原理,得

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$$
$$\leqslant ab(b+c-a)+bc(c+a-b)+ca(a+b-c)$$
$$=3abc+ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c),$$
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$$
$$\leqslant ac(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c)$$
$$=3abc+ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a),$$

两式相加再除以2即得证.

例 13 设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$, $y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_n$, 又 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个排列,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

(1975年第17届IMO试题)

证明 由排序原理,得

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iz_i,$$

即
$$-\sum_{i=1}^{n}2x_iy_i\leqslant-\sum_{i=1}^{n}2x_iz_i.$$

但
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+z_i^2),$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iy_i+y_i^2)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iz_i+z_i^2),$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

例 14 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为两两不等的正整数，求证：对任何正整数 n，下列不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

(1978 年第 20 届 IMO 试题)

证明 对于任意给定的正整数 n，将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按从小到大顺序排列为 $a'_1\leqslant a'_2\leqslant\cdots\leqslant a'_n$，这时 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ 的某种排列.

又 $\because \quad \frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)^2}<\cdots<\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1^2}.$

由排序原理，得

$$a'_1\cdot\frac{1}{1^2}+a'_2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+a'_n\cdot\frac{1}{n^2}$$
$$\leqslant a_1\cdot\frac{1}{1^2}+a_2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{n^2},$$

即
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a'_k}{k^2}.$$

又 $\because a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ 为两两不相等的正整数，$\therefore a'_k\geqslant k$，$k=1, 2, \cdots, n$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a'_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

故
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

例 15 设 a, b, c 是三角形的边长，求证：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

(1982 年第 24 届 IMO 试题)

证明 设 $a \geqslant b \geqslant c$，由例 12 的证法知

$$a(b+c-a) \leqslant b(c+a-b) \leqslant c(a+b-c),$$

但
$$\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{c},$$

故由排序定理，得

$$\begin{aligned} &\frac{a}{c}(b+c-a)+\frac{b}{a}(c+a-b)+\frac{c}{b}(a+b-c) \\ &\leqslant \frac{a}{a}(b+c-a)+\frac{b}{b}(c+a-b)+\frac{c}{c}(a+b-c) \\ &=a+b+c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & a^2b(b+c-a)+b^2c(c+a-b)+c^2a(a+b-c) \\ & \leqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab. \end{aligned}$$

移项即得

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

若 $a \geqslant c \geqslant b$，同理可证。

例 16 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足条件：(1) $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，(2) $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$，(3) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ 的两组任意实数($n \geqslant 2$)，为了使不等式 $|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n| \leqslant A(a_1-a_n)$ 成立，那么数 A 的最小值是多少？

(1988 年理科试验班复试试题)

解 为方便起见，将集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 划分为两个子集：$A=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$，这里 $\alpha_i \in X$，$i=1, 2, \cdots, S$，且 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_s \geqslant 0$，设 $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i=b$。$B=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$，这里 $\beta_i \in X$，$i=1, 2, \cdots, t$，且 $0 \geqslant \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_t$，设 $\sum\limits_{i=1}^{t} \beta_i=-c$。

于是由题设得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = b - c = 0,\ \sum_{i=1}^{n} |x_i| = b + c = 1.$$

解之，得 $$b = c = \frac{1}{2}.$$

现在考察 $|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n|$，不妨设

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant 0.$$

（$\because$ 若 $\sum_{i=1}^{n} a_ix_i < 0$，可取 $x_i' = -x_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 此时 $\sum_{i=1}^{n} x_i' = 0$，$\sum_{i=1}^{n} |x_i'| = 1$ 及 $\left|\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_ix_i'\right|$，不影响结论的一般性.）

于是由排序原理，得

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i \leqslant a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_s\alpha_s + a_{s+1}\beta_1 + a_{s+2}\beta_2 + \cdots + a_n\beta_t,$$

注意到 $a_1 \geqslant a_i$，$\alpha_i \geqslant 0$，则 $a_1\alpha_i \geqslant a_i\alpha_i$，这里 $i = 1, 2, \cdots, s$. 又 $a_{s+i} \geqslant a_n$ 及 $\beta_i \leqslant 0$，有 $a_{s+i}\beta_i \leqslant a_n\beta_i$，这里 $i = 1, 2, \cdots, t$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i \leqslant \sum_{i=1}^{s} a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{t} a_{s+i}\beta_i \leqslant a_1\sum_{i=1}^{s}\alpha_i + a_n\sum_{i=1}^{t}\beta_i = \frac{1}{2}(a_1 - a_n).$$

综合上述可知，满足题设不等式的 A 的最小值是 $\frac{1}{2}$.

本例中，若取 $a_i = \frac{1}{i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则得

$$\left|x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

这就是 1989 年全国高中数学联赛第二试第 2 题.

例 17 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$，$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$，$i_1$，$i_2$，…，$i_n$ 及 j_1，j_2，…，j_n 是 1，2，…，n 的任意两个排列．求证：

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{i_r}\cdot b_{j_s}}{r+s} \leqslant \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_r\cdot b_s}{r+s}.$$

证明 由排序原理，得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{b_{j_s}}{r+s} \leqslant \sum_{s=1}^{n}\frac{b_s}{r+s},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{i_r}b_{j_s}}{r+s} &\leqslant \sum_{r=1}^{n}a_{i_r}\sum_{s=1}^{n}\frac{b_s}{r+s}\\ &= \sum_{s=1}^{n}b_s\sum_{r=1}^{n}\frac{a_{i_r}}{r+s}\\ &\leqslant \sum_{s=1}^{n}b_s\sum_{r=1}^{n}\frac{a_r}{r+s} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_r b_s}{r+s}.\end{aligned}$$

例 18 如果 x_1，x_2，…，x_m 都是正数，则

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n \geqslant \frac{1}{m^{n-1}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n.\quad (m、n \in Z)$$

（若 $n>1$，$m<1$，则当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$ 时取等号．）

证明 不妨设

$$\left.\begin{array}{c} x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_m,\\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_m,\\ \cdots\cdots\\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_m. \end{array}\right\} n\text{组} \tag{12.11}$$

将每组中取出一数相乘，再从剩下的数中每排取出一数相乘，……，一直到 m 次取完为止，然后相加，设其和为 $\sum_{i=1}^{m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$．

由排序原理 Ⅲ 知

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n \geqslant \sum_{i=1}^{m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}. \tag{12.12}$$

然而将(12.11)中每组取一数相乘，共有 m^n 种取法，因而有 m^n 个乘积，故由(12.11)的对称性知它可组成 m^{n-1} 个形如(12.12)的不等式，相加后易知右边 $=(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$，因而有

$$m^{n-1}(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n)\geqslant(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n,$$

$$\therefore\quad x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n\geqslant\frac{1}{m^{n-1}}(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n.$$

且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_m$ 时取等号.

例 19 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)} \qquad (12.13)$$

证明 不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$，则 $\ln x_1\geqslant\ln x_2\geqslant\cdots\geqslant\ln x_n$，故由切比雪夫不等式得

$$x_1\ln x_1+x_2\ln x_2+\cdots+x_n\ln x_n$$

$$\geqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n),$$

即 $$\ln(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n})\geqslant\ln(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)},$$

$$\therefore\quad x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}.$$

说明：在(12.13)中，取 $n=3$, $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$，则有

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}.$$

这是第3届美国奥林匹克数学竞赛试题.

在(12.13)中，取 $n=5$, $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$, $x_4=d$, $x_5=e$，即有 $a^ab^bc^cd^de^e\geqslant(abcde)^{\frac{1}{5}(a+b+c+d+e)}$. 这是1979年青海省中学数学竞赛试题.

将(12.13)式两边3次方并化简，得

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

这是1978年上海市中学数学竞赛试题.

例 20 设 $n \in N$, $n \geqslant 2$, $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, r, s, $t > 0$, $a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t = A$, $a_1^r a_2^s + a_2^r a_3^s + \cdots + a_n^r a_1^s = B$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{r+s+t}}{A - a_i^t} \geqslant \frac{B}{n-1}, \tag{12.14}$$

等号成立的充要条件是 $a_1 = a_n$.

证明 令 $b_i = \dfrac{a_i^{r+s}}{A - a_i^t}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n.$$

又 $a_1^t \leqslant a_2^t \leqslant \cdots \leqslant a_n^t$, 由排序原理得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^t b_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^t b_{i+j}, \ (j = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{12.15}$$

($k > n$ 时, 约定 $b_k = b_{k-n}$), 将(12.15)中各式相加得

$$(n-1)C \geqslant \sum_{i=1}^{n} (A - a_i^t) b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{r+s}, \tag{12.16}$$

其中 C 表示(12.14)式左边. 因为

$$a_1^r \leqslant a_2^r \leqslant \cdots \leqslant a_n^r, \ a_1^s \leqslant a_2^s \leqslant \cdots \leqslant a_n^s,$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^{r+s} = \sum_{i=1}^{n} a_i^r \cdot a_i^s \geqslant a_1^r a_2^s + a_2^r a_3^s + \cdots + a_n^r a_1^s = B.$$

将上式代入(12.16)得 $C \geqslant \dfrac{B}{n-1}$, 此即(12.14)式.

本题有很多重要的推论, 例如对 $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, 有

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c}$$

$$\geqslant \frac{ab+bc+cd+da}{a}.$$

例 21 设 a, b, c 都是正数, 求证:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

（1988 年第 2 届国际“友谊杯”数学邀请赛试题）

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2$，且

$$\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{1}{a+b},$$

因此由排序原理得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}$$

及 $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b},$$

两式相加得

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$$

$$\geqslant\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}. \tag{12.17}$$

又由柯西不等式得

$$(b+c)^2=(1\cdot b+1\cdot c)^2\leqslant(1^2+1^2)(b^2+c^2),$$

$$\therefore\quad \frac{b^2+c^2}{b+c}\geqslant\frac{b+c}{2}.$$

同理 $$\frac{c^2+a^2}{c+a}\geqslant\frac{c+a}{2},\quad \frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{2}.$$

因此，代入(12.17)式得

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant a+b+c.$$

因此，不等式得证。

推广 1 对于 n 个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}$$
$$+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$$
$$\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n-1}.$$

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，则

$$\frac{1}{a_2+a_3+\cdots+a_n}\geqslant\frac{1}{a_1+a_3+\cdots+a_n}$$
$$\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}.$$

$n-1$ 次地利用排序原理，并且相加，得

$$(n-1)\left(\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\right)$$
$$\geqslant\frac{a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_1^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots$$
$$+\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}. \tag{12.18}$$

由柯西不等式，得

$$(a_2+a_3+\cdots+a_n)^2\leqslant(1^2+1^2+\cdots+1^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2),$$

$$\therefore\quad \frac{a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}\geqslant\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}.$$

同理有 $$\frac{a_1^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}\geqslant\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{n-1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1},$$

代入(12.18)式得

$$(n-1)\left(\frac{a_1^2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^2}{a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\right)\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

由此可得所要证的不等式.

推广 2 对于正数 a, b, c 及 $0<m<n$, 有

$$\frac{a^n}{b^m+c^m}+\frac{b^n}{c^m+a^m}+\frac{c^n}{a^m+b^m}\geqslant\frac{a^{n-m}+b^{n-m}+c^{n-m}}{2}.$$

证明(略).

例 22 设 $x, y, z\geqslant 0$, 求证:

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2\geqslant(x-z)(y-z)(x+y-z),$$

并确定何时等号成立.

(1992 年加拿大数学奥林匹克试题)

证明 因为

$$\begin{aligned}
&x(x-z)^2+y(y-z)^2-(x-z)(y-z)(x+y-z)\\
&\quad=x^3-2x^2z+xz^2+y^3-2y^2z+yz^2-x^2y-xy^2+xyz\\
&\qquad+x^2z+xyz-xz^2+xyz+y^2z-yz^2-z^2(x+y-z)\\
&\quad=(x^3-x^2z-x^2y)+(y^3-y^2z-xy^2)+3xyz\\
&\qquad-z^2(x+y-z)\\
&\quad=-x^2(y+z-x)-y^2(x+z-y)-z^2(x+y-z)\\
&\qquad+3xyz.
\end{aligned}$$

要证原不等式成立, 仅需证明

$$x^2(y+z-x)+y^2(x+z-y)+z^2(x+y-z)-3xyz\leqslant 0.$$

因为该不等式是对称不等式, 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$. 由于

$$\begin{aligned}
&x(y+z-x)-y(z+x-y)\\
&\quad=xy+xz-x^2-yz-yx+y^2\\
&\quad=z(x-y)+(y^2-x^2)=(y-x)(y+x-z)\leqslant 0,
\end{aligned}$$

同理 $$y(z+x-y)-z(x+y-z)\leqslant 0,$$

$$\therefore\quad x(y+z-x)\leqslant y(z+x-y)\leqslant z(x+y-z).$$

由排序原理得

$$\begin{aligned}&x^2(y+z-x)+y^2(z+x-y)+z^2(x+y-z)\\&\quad\leqslant xy(y+z-x)+yz(z+x-y)+zx(x+y-z)\\&\quad=3xyz+xy(y-x)+yz(z-y)+xz(x-z),\end{aligned}\tag{12.19}$$

$$\begin{aligned}&x^2(y+z-x)+y^2(z+x-y)+z^2(x+y-z)\\&\quad\leqslant xz(y+z-x)+xy(z+x-y)+yz(x+y-z)\\&\quad=3xyz+xy(x-y)+yz(y-z)+xz(z-x).\end{aligned}\tag{12.20}$$

(12.19)与(12.20)两式相加，得

$$2[x^2(y+z-x)+y^2(x+z-y)+z^2(x+y-z)]\leqslant 6xyz,$$

$$x^2(y+z-x)+y^2(x+z-y)+y^2(x+y-z)-3xyz\leqslant 0.$$

由排序原理可知，等号成立的条件为 $x=y=z$ 或

$$x(y+z-x)=y(z+x-y)=z(x+y-z),$$

即 $\begin{cases}x=z,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=z,\\x=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=y,\\z=0\end{cases}$ 或 $x=y=z$.

例 23 设 $\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1$, $a_i\geqslant 0$, $0\leqslant b_i\leqslant p$, $i=1, 2, \cdots, n$, $n\geqslant 2$. 如果 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=\sum\limits_{i=1}^n b_i=1$，求证：

$$\sum_{i=1}^n b_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}a_j\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}.$$

（1991 年第 32 届 IMO 备选题）

证明 设 $A_i=a_1a_2\cdots a_{i+1}\cdots a_n$. 由排序原理，不妨设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$, $A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_n$. 由于 $0\leqslant b_i\leqslant p$，且

$$\sum_{i=1}^n b_i=1,\ \frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1,$$

易知 $\quad\sum\limits_{i=1}^n b_iA_i\leqslant pA_1+(1-p)A_2\leqslant p(A_1+A_2).$

由均值不等式，

$$A_1+A_2=a_3a_4\cdots a_n(a_2+a_1)\leqslant\left(\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^n a_i\right)^{n-1}.$$

又
$$\sum_{i=1}^n a_i=1,$$

所以
$$\sum_{i=1}^n b_iA_i\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}.$$

例 24 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为非负数. 记 $x_{n+1}=x_1$, $a=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 求证：

$$\sum_{j=1}^n\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^n(x_j-a)^2.$$

并证明等式成立当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$.

（1992 年中国数学奥林匹克试题）

证明 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个排列，且 $0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_n$. 于是 $1\leqslant 1+y_1\leqslant 1+y_2\leqslant\cdots\leqslant 1+y_n$. 由排序不等式，有

$$\sum_{j=1}^n\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant\sum_{j=1}^n\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}.$$

只要能证得

$$\sum_{j=1}^n\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^n(y_j-a)^2$$

即可.

由于
$$\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}+\frac{1+y_{n-j+1}}{1+y_j}-2=\frac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+y_j)(1+y_{n-j+1})}$$
$$\leqslant\frac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+a)^2},$$

$$\therefore\ \sum_{j=1}^n\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^n(y_j-a),$$

$$\therefore\ \sum_{j=1}^n\frac{1+x_j}{1+y_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^n(x_j-a)^2.$$

又等号成立当且仅当 $y_j=y_{n-j+1}$ 或 $y_j\neq y_{n-j+1}$，$(1+a)^2=(1+y_j)(1+y_{n-j+1})$，由 $a\leqslant y_j$，y_{n-j+1} 有

$$y_j=y_{n-j+1}=a(j=1,2,\cdots,n).$$

这就证明了 $y_1=\cdots=y_n=a$，即 $x_1=\cdots=x_n=a$.

例 25 给定自然数 $n\geqslant2$，求最小正数 λ，使得对任意正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中任意 n 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，只要 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，就有

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\lambda(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n).$$

（1992 年中国数学奥林匹克队选拔赛试题）

证明 不妨设对一切 $i=1,2,\cdots,n$，有 $a_i>0$，否则左式为 0，不值一提.

令 $M=a_1a_2\cdots a_n$，$A_i=M/a_i$，$i=1,2,\cdots,n$，易知 $f(x)=M/x$ 为凸函数.

又注意到 $b_i\geqslant0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=1$，知 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的加权平均，亦即凸组合. 从而，由 $f(x)$ 的凸性知

$$\frac{M}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{M}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}b_iA_i.\qquad(12.21)$$

我们来对(12.21)式右端寻求最小的上界. 由排序原理可知，当 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，$A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_n$ 时，(12.21)式右端最大，因此，宜考虑此种情况下的上界. 此时，有

$$\sum_{i=1}^{n}b_iA_i\leqslant b_1A_1+(1-b_1)A_2.$$

由于 $0\leqslant b_1\leqslant\frac{1}{2}$，$A_1\geqslant A_2$，所以，有

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_i \leqslant \frac{1}{2}(A_1+A_2)=\frac{1}{2}(a_1+a_2)a_3\cdots a_n$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(a_1+a_2)+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

这样一来，便知

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

又当 $a_1=a_2=\frac{1}{2(n-1)}$, $a_3=\cdots=a_n=\frac{1}{n-1}$, $b_1=b_2=\frac{1}{2}$, $b_3=\cdots=b_n=0$ 时，有

$$a_1a_2\cdots a_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot(b_1a_1+b_2a_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} b_i a_i.$$

综上所述，知

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

下面给出本节开头的问题的解答：

（1）若按某一顺序放水时间依次为 $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$，则总的等待时间为

$$T_1+(T_1+T_2)+\cdots+(T_1+T_2+\cdots+T_{10})$$

$$=10T_1+9T_2+\cdots+2T_9+T_{10}.$$

不妨令 $T_1<T_2<\cdots<T_{10}$，又 $10>9>\cdots>2>1$，由排序

原理，得

$$10T_{i_1}+9T_{i_2}+\cdots+T_{i_{10}}>10T_1+9T_2+\cdots+T_{10},$$

所以，安排需时少的人先接水，总的花费时间最少.

（ii）两个水龙头的情形：考虑两个水龙头上人数相等的情形，若一个水龙头上某一顺序放水时间依次为 $T_1, T_2, \cdots, T_5$，另一个水龙头上按某一顺序放水时间依次为 $T'_1, T'_2, \cdots, T'_5$，则总的等待时间为：

$$\begin{aligned}&5T_1+4T_2+\cdots+T_5+5T'_1+4T'_2+\cdots+T'_5\\&=5T_1+5T'_1+4T_2+4T'_2+\cdots+T_5+T'_5.\end{aligned}$$

在排序原理中，取一个数组为

$$5,\ 5,\ 4,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1.$$

可见当 $T_1\leqslant T'_1\leqslant T_2\leqslant T'_2\leqslant T_3\leqslant T'_3\leqslant T_4\leqslant T'_4\leqslant T_5\leqslant T'_5$ 时，总的等待时间为最小.

显然使总的等待时间最少的排法可以不止一个．由此可知，每个水龙头各分配 5 个，并按从小到大的次序轮流分配到 I、II 两个水龙头上去，总的等待时间为最少.

若两个龙头上人数不等，则在人数少的龙头添上一定个数放水时间为 0 的人，使人数相等，再利用排序原理.

类似地可以讨论 n 个人 r 个龙头的情况，等待时间最少的排列，就是按照放水时间由小到大的次序，依次在 r 个龙头上放水，哪个龙头上的人打完了水，后面等待着的第一人就上去打水.

6．利用排序思想解题

如果一个数学问题涉及到一批可以比较大小的对象（实数，长度，角度等）它们之间没有事先规定顺序，那么，在解题之前，可以假定它们能按某种顺序（数的大小，线段的长短，角

的大小等）排列起来，排列之后，常有助于思考，因此，排序思想是一种解题的策略。

① 在解不定方程中的应用

例 26 求不定方程

$$x^w+y^w+z^w+u^w=w^w \tag{12.22}$$

的所有正整数解。

（1989 年苏州市高中数学竞赛试题）

解 设(x, y, z, u, w)是方程的一组正整数解，于是由有序化思想，可令$0<x\leqslant y\leqslant z\leqslant u$，于是$w\geqslant u+1$，且

$$4u^w\geqslant w^w\geqslant(u+1)^{w},$$

即

$$4>4\cdot\frac{u^u}{(u+1)^u}\geqslant u+1,$$

可见$u<3$，于是$u=1$，或$u=2$。

当$u=1$时，必有$x=y=z=1$，于是$w=2$

当$u=2$时，则$x^2+y^2+z^2+2^2\leqslant 4\cdot 2^2<3^3\leqslant w^w$。

因此，经检验，原方程有且仅有一解

$$x=y=z=u=1,\ w=2.$$

说明：(1) 利用排序法，可使未知量x, y, z, u的取值范围大大缩小。排序后由于仅有两种情形，从而使问题容易求解。

(2) 类似本题的解法，可以求不定方程$x!+y!+z!=w!$的所有正整数解(1983 年加拿大数学竞赛试题)(答：$x=y=z=2$，$w=3$)。

例 27 求不定方程$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$的所有正整数解。

（1988 年全国初中联赛试题）

解　设$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$是原方程的一个正整数解，利用有序化思想，可令$0<x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$，于是有

$$5x_1\leqslant x_1x_2x_3x_4x_5\leqslant 5x_5,$$

即

$$x_1x_2x_3x_4\leqslant 5\leqslant x_2x_3x_4x_5. \tag{12.23}$$

由(12.23)式及$x_i(i=1, 2, \cdots, 5)$都是正整数，所以恰有如下两种可能：

(1) $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=2$；

(2) $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4\leqslant 5$.

在(1)时，得$x_5=2$；在(2)时，得$(x_4-1)(x_5-1)=4$，于是有$x_4=x_5=3$或$x_4=2$, $x_5=5$. 经验证，$x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=x_5=2$及$x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=x_5=3$及$x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=2$, $x_5=5$都是原方程的整数解. 因此，原方程的任一正整数解$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$，其中$x_1, \cdots, x_5$必是下面三个数列1, 1, 2, 2, 2; 1, 1, 1, 3, 3; 1, 1, 1, 2, 5之一的任一排列.

说明：本例针对原方程两端的对称性，利用有序化思想，使一般问题化归特殊问题，从而便于求解.

例 28　求不定方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6} \tag{12.24}$$

的正整数解的个数.

解　先令

$$1\leqslant x\leqslant y\leqslant z, \tag{12.25}$$

于是$\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}$，故由(12.24)得

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{3}{x},$$

即

$$\frac{1}{x}<\frac{5}{6}\leqslant\frac{3}{x},$$

于是 $\frac{6}{5}<x\leqslant\frac{18}{5}$, 故 $x=2$ 或 3.

(1) 当 $x=2$ 时, 由(12.24)、(12.25)知, y 只能取 2, 3, 4, 5, 6, 于是代入(12.24)得

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{2}{15},\ \frac{1}{6}.$$

由于 z 是正整数, 故 $z=12$ 或 6.

$$\therefore\quad (x,\ y,\ z)=(2,\ 4,\ 12),\ (2,\ 6,\ 6).$$

(2) 当 $x=3$ 时, 由(12.24)、(12.25)知 y 只能取 3, 4, 5, 再代入(12.24)式得 $\frac{1}{z}=-\frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{10}$. 由于 z 是整数, 故 $z=6$ 或 4.

$$\therefore\quad (x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 6),\ (3,\ 4,\ 4).$$

因 (2, 4, 12) 中三数的任一排列都是 (12.24) 的正整数解, 故有 6 解; 而(2, 6, 6), (3, 3, 6), (3, 4, 4)中每个解的三数的任一排列也都是(12.24)的正整数解, 于是就有 9 个解.

故不定方程(12.24)共有 15 个正整数解.

例 29 求方程组

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{y}=1, \\ y-\dfrac{1}{z}=1, \\ z-\dfrac{1}{x}=1 \end{cases} \tag{12.26}$$

的实数解.

解 根据题设知 x, y, z 全不为 0, 且由(12.26)得

$$\begin{cases} xy-1=y, \\ yz-1=z, \\ xz-1=x. \end{cases} \tag{12.27}$$

先令

$$x\geqslant y\geqslant z. \tag{12.28}$$

由(12.27)得　　$xz-1=x\geqslant xy-1=y\geqslant z=yz-1$,

于是

$$xz\geqslant xy\geqslant yz. \tag{12.29}$$

(1) 若 $x>0$, 则由(12.29)式得 $z\geqslant y$, 又由(12.28)式得 $y=z$, 代入(12.27)得 $x=y$, 即得 $x=y=z$.

(2) 若 $x<0$, 则由(12.28)式得 $y<0$, 由(12.29)式得 $x\leqslant z$, 再由(12.28)式得 $x=y=z$.

因此,由(12.27)得一个方程 $x^2-x-1=0$, 解得

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

故原方程组的解为

$$x=y=z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

例30　解方程组

$$\begin{cases} |a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1,\\ |a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1,\\ |a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1,\\ |a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1, \end{cases}$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4 是不相等的实数.

分析　注意到方程组中交换各数的下标时，原方程组不变,不妨先把 a_1, a_2, a_3, a_4 有序化，令 $a_1>a_2>a_3>a_4$，于是可去掉方程组中系数的绝对值符号,即

$$\begin{cases} (a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1, & (12.30)\\ (a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1, & (12.31)\\ (a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1, & (12.32)\\ (a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1. & (12.33) \end{cases}$$

再(12.30)−(12.31),(12.31)−(12.32),(12.32)−(12.33),并利用 $a_1>a_2>a_3>a_4$ 的性质,可得

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4=x_1, \\ -x_2+x_3+x_4=x_1, \\ -x_2-x_3+x_4=x_1, \end{cases}$$

解之,得 $$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4},\ x_2=x_3=0.$$

解 设 $a_{t_1}>a_{t_2}>a_{t_3}>a_{t_4}$ (t_1, t_2, t_3, t_4 是1, 2, 3, 4的某一排列). 利用上述分析,即可解得

$$x_{t_1}=x_{t_4}=\frac{1}{a_1-a_4},\ x_{t_2}=x_{t_3}=0.$$

② 在证明不等式中的应用

例 31 设 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 都是自然数,且

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=x_1x_2\cdots x_6. \tag{12.34}$$

求证:

$$1<\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}\leqslant 2. \tag{12.35}$$

证明 由(12.34)可知, $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 不可能全是1,故(12.35)的左端不等号成立;为了证(12.35)右端的不等式,令 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_k>1$, 且 $x_{k+1}=\cdots=x_6=1$, 改写 $x_i=1+y_i$ ($i=1, 2, \cdots, k$),于是(12.34)式即为

$$y_1+\cdots+y_k+6=(1+y_1)\cdots(1+y_k), \tag{12.36}$$

且 $y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_k\geqslant 1$,而要证的不等式可写为

$$\frac{y_1+\cdots+y_k}{6}\leqslant 1. \tag{12.37}$$

若 $k\geqslant 3$,那么由(12.36)式右边展开得

$$\begin{aligned} y_1+\cdots+y_k+6=&1+y_1+\cdots+y_k+y_1y_2+\cdots \\ &+y_1y_k+y_2y_3+\cdots+y_2y_k+\cdots \end{aligned}$$

$$>1+2(y_1+\cdots+y_k).$$

故 $6>y_1+\cdots+y_k$，即得(12.37)式.

若 $k=2$，那么(12.36)式即为

$$y_1+y_2+6=(1+y_1)(1+y_2),$$

于是 $6=1+y_1y_2=y_1+y_2+(y_1-1)(y_2-1)\geqslant y_1+y_2$，即得(12.37)式.

若 $k=1$，则与(12.36)式矛盾，由此证毕.

类似证明，可得：

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 全是自然数，且

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n \quad (n\geqslant 2),$$

则
$$1<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant 2.$$

（1991 年江苏省高中数学竞赛试题）

例 32 设 $x_1, x_2, x_3, x_4>0$，$x_1+x_2+x_3+x_4=\pi$. 求证：

$$\sin x_1\sin x_2\sin x_3\sin x_4<\frac{1}{2}.$$

证明 不妨假设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4$. 若 $x_4\geqslant\frac{\pi}{2}$，则 $x_1+x_2+x_3\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是

$$\begin{aligned}&\sin x_1\sin x_2\sin x_3\sin x_4\\&\leqslant\sin x_1\sin x_2\sin x_3<x_1x_2x_3\\&\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3\leqslant\frac{1}{27}\cdot\frac{\pi^3}{8}<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若 $x_4<\frac{\pi}{2}$，则

$$\begin{aligned}&\sin x_1\sin x_2\sin x_3\sin x_4<x_1x_2x_3x_4\\&\qquad\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4\end{aligned}$$

$$\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^4<\frac{1}{2}.$$

例 33 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n(n\geqslant 2)$ 是 n 个互不相同的实数，$S=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$M=\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2$。求证：

$$\frac{S}{M}\geqslant\frac{n(n^2-1)}{12}.$$

（1990 年全国高中数学冬令营选拔赛试题）

证明 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$。

当 $j>i$ 时，

$$a_j-a_i=(a_j-a_{j-1})+(a_{j-1}-a_{j-2})+\cdots+(a_{i+1}-a_i)$$
$$\geqslant(j-i)\sqrt{M},$$

$$\therefore\quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)^2\geqslant M\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2$$
$$=M\sum_{k=1}^{n-1}(1^2+2^2+\cdots+k^2)$$
$$=M\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$=M\left(2\sum_{k=1}^{n-1}C_{k+2}^3-\sum_{k=1}^{n-1}C_{k+1}^2\right)$$
$$=M(2C_{n+2}^4-C_{n+1}^3)$$
$$=M\cdot\frac{n^2(n+1)(n-1)}{16}.\qquad(12.38)$$

另一方面，

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)^2=(n-1)S-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j$$
$$=nS-(a_1+\cdots+a_n)^2\leqslant nS,\qquad(12.39)$$

由(12.38)、(12.39)即得结论。

③ 在证明几何题中的应用

例 34 如图 16，设 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，直线 AP，

BP, CP 交三角形的对边于 D, E, F, 求证：$\frac{AP}{PD}$, $\frac{BP}{PE}$, $\frac{CP}{PF}$ 中至少有一个不大于 2, 也至少有一个不小于 2.

(1961 年第 3 届 IMO 试题)

证明 不妨设

$$\frac{PD}{AD}\leqslant\frac{PE}{BE}\leqslant\frac{PF}{CF}.$$

图 16

$$\because\quad \frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}$$

$$=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{PD}{AD}\leqslant\frac{1}{3},\quad \frac{PF}{CF}\geqslant\frac{1}{3},$$

即
$$\frac{AD}{PD}\geqslant 3,\quad \frac{CF}{PF}\leqslant 3,$$

即
$$1+\frac{AP}{PD}\geqslant 3,\quad 1+\frac{CP}{PF}\leqslant 3.$$

因此
$$\frac{AP}{PD}\geqslant 2,\quad \frac{CP}{PF}\leqslant 2$$

例 35 设 α、β、γ 是任意一个锐角三角形的三个内角，求证：

$$2\left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}+\frac{\sin 2\beta}{\beta}+\frac{\sin 2\gamma}{\gamma}\right)$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin 2\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin 2\beta$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin 2\gamma.$$

证明 不失一般性，可设 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，则

$$\frac{1}{\alpha} \geqslant \frac{1}{\beta} \geqslant \frac{1}{\gamma}.$$

又由题设易知 $\pi-2\alpha$, $\pi-2\beta$, $\pi-2\gamma$ 可作为一个三角形的三内角，设它们所对的边为 a, b, c，则由正弦定理知

$$a:b:c=\sin(\pi-2\alpha):\sin(\pi-2\beta):\sin(\pi-2\gamma)$$
$$=\sin 2\alpha:\sin 2\beta:\sin 2\gamma.$$

$$\because \quad \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma, \ \therefore \quad \pi-2\alpha \geqslant \pi-2\beta \geqslant \pi-2\gamma,$$

于是由三角形的边角关系，知 $a \geqslant b \geqslant c$.

$$\therefore \quad \sin 2\alpha \geqslant \sin 2\beta \geqslant \sin 2\gamma.$$

于是
$$(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) \geqslant 0,$$

即
$$\left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}+\frac{\sin 2\beta}{\beta}\right) \geqslant \frac{\sin 2\alpha}{\beta}+\frac{\sin 2\beta}{\alpha}.$$

同理
$$\frac{\sin 2\beta}{\beta}+\frac{\sin 2\gamma}{\gamma} \geqslant \frac{\sin 2\beta}{\gamma}+\frac{\sin 2\gamma}{\beta},$$

$$\frac{\sin 2\gamma}{\gamma}+\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \geqslant \frac{\sin 2\gamma}{\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\gamma}.$$

三式相加，即得欲证的不等式.

例 36 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边，且 $m \in R^{+}$，求证：

$$\frac{a}{m+a}+\frac{b}{m+b}>\frac{c}{m+c}.$$

证明 设 c 边最长，且对三边 a、b、c 排序：$a \leqslant b \leqslant c$.

$$\because \quad a+b>c,$$

$$\therefore \quad \frac{a}{m+a}+\frac{b}{m+b} \geqslant \frac{a}{m+b}+\frac{b}{m+b}$$
$$=\frac{a+b}{m+b}>\frac{c}{m+b} \geqslant \frac{c}{m+c}.$$

若 c 不是最长边，重新对 a, b, c 排序：$a \leqslant c \leqslant b$，则 $b-c$

$\geqslant 0$. 于是

$$\frac{b}{m+b}-\frac{c}{m+c}=\frac{m(b-c)}{(m+b)(m+c)}\geqslant 0,$$

即
$$\frac{b}{m+b}\geqslant\frac{c}{m+c},$$

但
$$\frac{a}{m+a}>0,$$

故
$$\frac{a}{m+a}+\frac{b}{m+b}>\frac{c}{m+c}.$$

例 37 $\triangle ABC$ 的内切圆切三边 AB、BC、CA 于 D、E、F，且 AB、BC、CA 被切点分成的两线段之比都属于开区间 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. 求证：$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

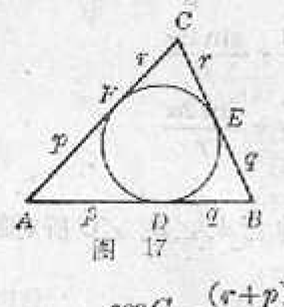


图 17

证明 如图 17，设 $AD=AF=p$, $BD=BE=q$, $CE=CF=r$. 不失一般性，对切线长 p、q、r 作排序：$p\geqslant q\geqslant r$. 由此知，边 AB 最长，它所对的角 $\angle C$ 最大. 由余弦定理得

$$\cos C=\frac{(r+p)^2+(r+q)^2-(p+q)^2}{2(r+p)(r+q)}.$$

$$\because\quad \frac{1}{2}<\frac{p}{r}<2,\quad \therefore\quad p<2r.$$

当然 $q<2r$,

于是 $(r+p)^2+(r+q)^2-(p+q)^2$

$$=2(r^2+pr+qr-pq)$$

$$>2(r^2+pr+qr-2rq)=2r(r+p-q)$$

$$>2r(r+r-2r)=0,$$

$\therefore\quad \cos C>0$，即 $\angle C$ 为锐角.

于是 $\angle A$、$\angle B$ 亦为锐角，故 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

例 38 若 $\triangle ABC$ 内或边上任一点到三边的距离之和为定值(最大边或最小边上的高)，则 $\triangle ABC$ 是正三角形.

证明 不妨设三边长分别为 a, b, c，且 $a \geqslant b \geqslant c$，$\triangle ABC$ 内任一点 P，到三边的距离分别为 h_a，h_b，h_c，BC 边上的高为 H_a，则由题设得

$$h_a + h_b + h_c = H_a. \qquad (12.40)$$

又因 $ah_a + bh_b + ch_c = 2S_{\triangle ABC} = aH_a$，由正弦定理得

$$h_a \sin A + h_b \sin B + h_c \sin C = H_a \sin A. \qquad (12.41)$$

(12.40)乘以 $\sin A$ 后减去(12.41)，得

$$h_b(\sin A - \sin B) + h_c(\sin A - \sin C) = 0. \qquad (12.42)$$

注意到由 $a \geqslant b \geqslant c$，可得 $\sin A \geqslant \sin B \geqslant \sin C$，故

$$\sin A - \sin B \geqslant 0,\ \sin A - \sin C \geqslant 0.$$

又 h_a，h_b，h_c 全为正数，由(12.42)得

$$\sin A - \sin B = 0,\ \sin A - \sin C = 0,$$

即
$$\sin A = \sin B = \sin C,$$

故
$$a = b = c.$$

当 $h_a + h_b + h_c = H_c$(H_c 是 AB 边上的高)时，同理可证.

④ *在解数论题中的应用*

例 39 求证在不大于 $2n$ 的任意 $n+1$ 个正整数中，至少有一个能被另一个整除.

证明 若这 $n+1$ 个数中有相同的，则显然成立. 若这 $n+1$ 个数各不相同，不妨假设

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} \leqslant 2n.$$

令 $a_i = 2^{\beta_i} \cdot b_i$，其中 $\beta_i \geqslant 0$，b_i 为奇数，$i = 1, 2, \cdots, n+1$，则 $b_i < 2n$.

$\because$ 在 $1, 2, \cdots, 2n$ 中共有 n 个不同的奇数，$\therefore$ 在 b_1，b_2，

$\cdots$, b_{n+1} 这 $n+1$ 个奇数中至少有两个相同，设 $b_k=b_l(k<l)$，这时，$a_k<a_l$，则 $2^{\alpha_k}<2^{\alpha_l}$.

于是由 $2^{\alpha_k}|2^{\alpha_l}$，知 $a_k|a_l$.

例 40 自然数 n 的约数中没有不等于 1 的平方数，且所有正约数的和等于 $2n$，求 n.

（1991 年江苏省数学夏令营试题）

解 根据题设，可令 $n=p_1p_2\cdots p_k$，其中

$$p_1<p_2<\cdots<p_k, \tag{12.43}$$

$p_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 都是质数，又据题设可得

$$(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k)=2n=2p_1p_2\cdots p_k. \tag{12.44}$$

注意到质数 p_k 应整除(12.44)式左端一个因数，但 p_k 不整除 p_k+1，由(12.43)可得

$$1+p_1<1+p_2<\cdots<1+p_{k-2}\leqslant p_{k-1}<p_k,$$

故 p_k 不整除 $1+p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-2)$，于是 p_k 整除 $1+p_{k-1}$，又由(12.43)知 $1+p_{k-1}\leqslant p_k$，故 $1+p_{k-1}=p_k$. 而相差 1 的两质数只有 2 与 3，故 $p_{k-1}=2$，$p_k=3$. 由此得 $n=6$.

例 41 有十二个不同的自然数，它们都小于 37，求证：这些自然数两两相减所得的差中，至少有三个相等.

证明 不失一般性，设十二个自然数按大小排列为 $a_1<a_2<\cdots<a_{12}$. 若命题不成立，则 $a_{i+1}-a_i(i=1, 2, \cdots, 11)$ 等 11 个数中，至多有两个是相等的，于是

$$\begin{aligned}a_{12}=&(a_{12}-a_{11})+(a_{11}-a_{10})+\cdots+(a_3-a_2)\\&+(a_2-a_1)+a_1\\\geqslant&[2(1+2+3+4+5)]+6+1=37.\end{aligned}$$

这与已知矛盾.

例 42 已知十个不同的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$，求证：至少

有55个互不相等的形如$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_{10}a_{10}$的正数($k_i=0$或1，$i=1, 2, \cdots, 10$).

证明 不失一般性，设$0<a_1<a_2<\cdots<a_9<a_{10}$. 于是可得如下55个互不相等的正数：

$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$; $a_{10}+a_i(i=1, \cdots, 9)$; $a_{10}+a_9+a_i(i=1, 2, \cdots, 8)$, $a_{10}+a_9+a_8+a_i(i=1, \cdots, 7)$; $\cdots$, $a_{10}+a_9+\cdots+a_2+a_1$. 由此得证.

本例可推广如下：

已知n个互不相同的正数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，求证：至少有$\frac{n(n+1)}{2}$个互不相等的形如$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n$的正数($k_i=0$或1，$i=1, 2, \cdots, n$).

⑤ *在解非常规几何题中的应用*

例43 已知六边形的周长等于20，各边长都是整数，且以它的任意三条边都不能构成三角形，那么这样的六边形有多少个？为什么？

（1990年全国初中数学联赛试题）

解 设六边形的边长分别为$a_1, a_2, \cdots, a_6$，且可令$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_6$，注意到任意三角形三边都不能构成三角形的充要条件是$a_1+a_2\leqslant a_3$, $a_2+a_3\leqslant a_4$, $a_3+a_4\leqslant a_5$, $a_4+a_5\leqslant a_6$. 由于六边形的周长为20，所以可取$a_1=a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $a_5=5$, $a_6=8$，正是符合题意的一个六边形，又因已知边长的六边形的不稳定性，所以共有无穷多个六边形.

例44 已知平面上有n个点，那么在平面上必有一个圆，使圆内恰有$m(<n)$个点，圆上恰有一个点，圆外有$n-m-1$个点.

分析 如果在平面上能找到一点O，使O到已知的n个

点的距离都不相等，那么用排序法，按线段 $OA_i(i=1, \cdots, n)$ 长，由小到大地排列，比如 $OA_1<OA_2<\cdots<OA_m<OA_{m+1}<OA_{m+2}<\cdots<OA_n$. 这时，以 O 为圆心，OA_{m+1} 的长为半径作一圆，即为所求.

证明 取平面上一点 O，它不在 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的任意两点连线的垂直平分线上，于是 O 到这 n 个点的距离都不相等. 再重复上述分析中的一段话，即得所证.

类似地可得：

已知平面上有 n 个点，求证存在 $n+1$ 个同心圆，使得 $n+1$ 个圆周所组成的 n 个圆环中，每个圆环内恰有 n 个点中的一个点.

例 45 设有 $2n\times 2n$ 的正方形方格棋盘，在其中任意 $3n$ 个方格中，各放一枚棋子，求证：可以选出 n 行和 n 列，使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中.

(1990 年全国初中数学联赛试题)

证明 设 $3n$ 枚棋子已分别放在棋盘的 $3n$ 个方格中，观察这 $2n$ 个行，不失一般性，令第 $1, 2, \cdots, 2n$ 行中棋子枚数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$，且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n}$. 据题设得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}=3n. \qquad (12.45)$$

注意到 $a_1, \cdots, a_{2n}$ 全是非负整数，故 $a_{n+1}+\cdots+a_{2n}\geqslant 2n$. 这是因为若

$$a_{n+1}+\cdots+a_{2n}<2n, \qquad (12.46)$$

则 $a_{n+1}\leqslant 1$，于是 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant 1$，得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n. \qquad (12.47)$$

由(12.46)式与(12.47)式得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}<3n.$$

这与(12.45)式矛盾. 由此可见，$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n$. 于是可

在这 $2n$ 行中，先取出第 $n+1, n+2, \cdots, 2n$ 行，这时，仅剩下的第 $1, 2, \cdots, n$ 行中，棋子枚数 $\leqslant n$. 这至多 n 枚棋子，至多分布在棋盘中的 n 列，现取棋子所在的 n 列，即为所求.

类似地，可证下列问题：

设有 $(m+n)\times(m+n)$ 的正方形方格棋盘，在其任意 $m+2n$ 个方格中各放一枚棋子，求证：可选出 n 行和 m 列使得 $m+2n$ 枚棋子都在这 n 行和 m 列中.

例 46 在一张向四面无限伸展的方格纸上，每一方格内任意填上一个实数，证明：纸上必有一个方格内的数不大于这一方格周围八个方格中至少四个方格内所填的数.

分析 本例的条件很一般，在纸的每一方格内可以有无限种不同的填法，从表面上看来，一时无从下手，但是从题意看，相邻各数需比较大小，所以就容易想到有序化思想，但是无限个小方格的数排次序不大好办，为此，不得已而求其次，先从 4×4 方格纸上任意填 16 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{16}$. 经考察，可先有序化，令 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{16}$，先看 a_1，如果 a_1 符合题意，那么命题得证，如果 a_1 不合题意，那么 a_1 必在 4×4 方格纸的一只角上的方格内，再依次地考察 a_2, a_3, a_4，如果 a_2, a_3, a_4 都不合题意，那么它们必定在 4×4 方格纸内四只角上的方格内，这时，看 a_5，无论它填在剩下的 12 只方格内的哪一只，a_5 周围相邻的方格中至少有 4 格内填了 $a_6, \cdots, a_{16}$ 中的某 4 个，可见 a_5 必合题意.

证明（略）.

说明：本例可改述为下列命题：

在 4×4 方格纸上，每一方格内任意填上一个实数，证明其中有一方格内的数不大于这一方格周围相邻的一些格子中至少有四个格内所填的数.

十三、切比雪夫不等式及其应用

切比雪夫不等式 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为任意两组实数．若 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ 且 $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$，或 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ 且 $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right). \tag{13.1}$$

若 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ 且 $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$，或 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ 而 $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right). \tag{13.2}$$

(13.1)、(13.2)两式中的等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 或 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ 时成立．

证明 见第十二节例 2．

下面举例说明切比雪夫不等式的应用．

例 1 设 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$，且 $a+b+c+d+e=1$．求证：$ad+dc+cb+be+ea \leqslant \frac{1}{5}$．

（1994 年国家数学集训队测验试题）

证明 $\because$ $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$，

$\therefore$ $d+e \geqslant c+e \geqslant b+d \geqslant a+c \geqslant a+b$．

利用切比雪夫不等式，有

$$\begin{aligned} &a(d+e)+b(c+e)+c(b+d)+d(a+c)+e(a+b) \\ &\leqslant \frac{1}{5}(a+b+c+d+e)[(d+e)+(c+e)+(b+d) \\ &\quad +(a+c)+(a+b)]=\frac{2}{5}, \end{aligned}$$

即

$$ad+dc+cb+be+ea\leqslant\frac{1}{5}.$$

例 2 已知 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$, $b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_1>0$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant n\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big/\sum_{i=1}^{n}b_i\Big). \tag{13.3}$$

证明 取 $x_i=a_i$, $y_i=\frac{1}{b_i}$, 则由

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,\ b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_1>0,$$

可知 x_i, y_i 满足(13.1)式的条件, 故

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\frac{1}{b_i}\geqslant\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\Big),$$

又正数 b_1, b_2, $\cdots$, b_n 的调和平均数不大于它们的算术平均数, 故

$$n\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_i\Big/n.$$

其中等号仅在 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立. 这样有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i\Big/\sum_{i=1}^{n}b_i,$$

亦即(13.3)式成立. 而且等号仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

最后, 若把(13.3)式改写为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i}, \tag{13.4}$$

此式表示, 在满足所设条件下, 商的算术平均值不小于其算术平均值的商.

利用(13.3)式可以解决一些较难的分式型不等式的证明

问题.

例3　题目见第二节例6.

证明　令

$$S=\frac{a_1}{1+a_2+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+\cdots+a_{n-1}}$$

$$=\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n}.$$

不妨设 $1>a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，则 $0<2-a_1\leqslant 2-a_2\leqslant\cdots\leqslant 2-a_n$.

由(13.3)式，得

$$S\geqslant n\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{(2-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(2-a_n)}=\frac{n}{2n-1}.$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时，等号成立.

故 S 的最小值为 $\frac{n}{2n-1}$.

例4　设 x、y、z、λ、μ、$3\lambda-\mu$ 均大于零，且 $x+y+z=1$. 求证：

$$f(x,y,z)=\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant\frac{3}{3\lambda-\mu}.$$

(《数学通报》1990年第8期问题668)

说明　此题应把已知条件“$3\lambda-\mu>0$”强化为“$\lambda-\mu x>0$, $\lambda-\mu y>0$, $\lambda-\mu z>0$”才成立. 否则取 $x=\frac{2}{3}$, $y=z=\frac{1}{6}$, $\lambda=3$, $\mu=6$ 时，左边 $=-\frac{1}{2}<$ 右边 $=1$.

证明　不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$. $\because\lambda,\mu>0$, $\therefore 0<\lambda-\mu x\leqslant\lambda-\mu y\leqslant\lambda-\mu z$. 由(13.3)式，得

$$f(x, y, z) \geqslant 3 \cdot \frac{x+y+z}{(\lambda-\mu x)+(\lambda-\mu y)+(\lambda-\mu z)}$$

$$=\frac{3(x+y+z)}{3\lambda-\mu(x+y+z)}=\frac{3}{3\lambda-\mu}.$$

例 5 若 α、β、γ 均为锐角，且满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 求证：

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma \geqslant \frac{3}{2}.$$

（《数学通报》1993 年第 6 期问题 839）

证明 不妨设 $1>\cos^2\alpha \geqslant \cos^2\beta \geqslant \cos^2\gamma>0$，则 $0<1-\cos^2\alpha \leqslant 1-\cos^2\beta \leqslant 1-\cos^2\gamma$. 由(13.3)式，得

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma$$

$$=\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{1-\cos^2\beta}+\frac{\cos^2\gamma}{1-\cos^2\gamma}$$

$$\geqslant 3 \cdot \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)}$$

$$=\frac{3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}{3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}=\frac{3}{2}.$$

例 6 设 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 都是正数$(n \geqslant 2)$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$. 求证：$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} / \sqrt{n-1}$.

（1989 年第 4 届中学生数学冬令营试题）

证明 不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，显然

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x_n}},$$

由切比雪夫不等式知

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\cdot n^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}.$$

由平方平均-算术平均不等式可知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i} \leqslant \left(\frac{(1-x_1)+\cdots+(1-x_n)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

另一方面，由柯西不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}1\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n},$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

例 7　求证：不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}, \tag{13.5}$$

其中 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

证明　设 $a_i > a_{i+1}$　$(i=1, 2, \cdots, n-1)$，则 $S-a_i$ 与 a_i 反序，于是由切比雪夫不等式

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}(S-a_i)}{\sum_{i=1}^{n}(S-a_i)} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}}{n}.$$

但上式左边 $=\frac{1}{n-1}$,

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

例 8 证明循环不等式

$$\frac{S_{k_1}}{S-S_{k_1}}+\frac{S_{k_2}}{S-S_{k_2}}+\cdots+\frac{S_{k_n}}{S-S_{k_n}}\geqslant\frac{nk}{n-k},\qquad(13.6)$$

其中
$$S=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$
$$S_{k_1}=x_1+x_2+\cdots+x_k,$$
$$S_{k_2}=x_2+x_3+\cdots+x_{k+1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_{k_n}=x_n+x_1+\cdots+x_{k-1}\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

证明 若 $i\neq j$，则当 $S_{k_i}<S_{k_j}$ 时，易证

$$\frac{S_{k_i}}{S-S_{k_i}}<\frac{S_{k_j}}{S-S_{k_j}},\quad 而\quad S-S_{k_i}>S-S_{k_j},$$

故知 $S-S_{k_i}$ 与 $\dfrac{S}{S-S_{k_i}}$ 反序，由切比雪夫不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(S-S_{k_i})\cdot\frac{S_{k_i}}{S-S_{k_i}}\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{k_i}}{S-S_{k_i}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(S-S_{k_i}),$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{k_i}}{S-S_{k_i}}\geqslant\frac{nk}{n-k}.$$

令 $k=1$，则上式即为例 7，因此，例 8 可以看作是例 7 的一种推广．

例 9 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$为正数，$r=s+t$，其中 s、t 为非零实数，则当 s、t 同号时，有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^r\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^s\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^t\right);\qquad(13.7)$$

当 s、t 异号时

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{s+t}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^s\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^t\right). \qquad (13.8)$$

证明　不失一般性，假定 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，则当 $s>0$，$t>0$ 时，$a_1^s\geqslant a_2^s\geqslant\cdots\geqslant a_n^s$ 且 $a_1^t\geqslant a_2^t\geqslant\cdots\geqslant a_n^t$；当 $s<0,t<0$ 时，$a_1^s\leqslant a_2^s\leqslant\cdots\leqslant a_n^s$，且 $a_1^t\leqslant a_2^t\leqslant\cdots\leqslant a_n^t$；当 $s>0$，$t<0$ 时，$a_1^s\geqslant a_2^s\geqslant\cdots\geqslant a_n^s$，而 $a_1^t\leqslant a_2^t\leqslant\cdots\leqslant a_n^t$；当 $s<0$，$t>0$ 时，$a_1^s\leqslant a_2^s\leqslant\cdots\leqslant a_n^s$，而 $a_1^t\geqslant a_2^t\geqslant\cdots\geqslant a_n^t$.

因此，由(13.1)、(13.2)即得(13.7)、(13.8).

(13.7)、(13.8)两个不等式在解题中也常常用到，例如下面的一些问题就可以利用它们来解.

1．设 a、b、c、d 均为正数，求证：

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^3\leqslant16(a^6+b^6+c^6+d^6)$$
$$\leqslant4(a^9+b^9+c^9+d^9)\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\right).$$

2．求证对于任何实数 a、b，下列不等式成立：

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}.$$

(1958～1959 年波兰数学竞赛试题)

3．求证：如果 a、b、c 是正数，那么

$$a+b+c\leqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

(1962～1963 年波兰数学竞赛试题)

例 9 可以写成如下的形式：

定理　设 $f(x)$ 是区间 $(a,\ b)$ 上的增(或减)函数，则对任意 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\in(a,\ b)$，有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i)}{n} \underset{(\text{或}\leqslant)}{\geqslant} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} f(a_i)}{n}. \qquad (13.9)$$

又若 $f(x)$ 是严格单调的，则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

证明 仅对 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的严格增函数情况进行证明，$f(x)$ 为减函数的情况证法类似.

因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 在(13.1)中对称，故可设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_n)$，从而利用切比雪夫不等式得(13.9)成立，其中等号成立的主要条件为 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)$，依 $f(x)$ 的严格单调性，后者等价于 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

在这个定理中，选择不同的函数 $f(x)$ 可得到一系列不等式(下列各式中 a_i 均属正值).

取 $f(x)=x$(增函数)，得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Big/ n \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \Big/ n^2 \quad \text{或} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Big/ n} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ n,$$

此即均方根-算术平均值不等式.

取 $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in R^+$(减函数)，得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \Big/ n \geqslant 1,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ n \geqslant n \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i},$$

这是算术-调和平均不等式.

取 $f(x)=x^{\frac{s}{r}}$, $x\in R^+$, r、s 为正有理数，且 $m=r+s$，易知 $f(x)$ 是增函数. 根据(13.9)并以 a_i^r 代替 a_i，得

$$\frac{1}{n}(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)$$

$$\geqslant\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\cdot\frac{a_1^s+a_2^s+\cdots+a_n^s}{n}.$$

上面的定理有很广泛的应用，下面例 10～例 12 即是。

例 10　设 A, B, C 是锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角，求证：

$$\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\geqslant\frac{3}{\pi}(\sin A+\sin B+\sin C).$$

证明　取 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,　$x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $x<\operatorname{tg}x$，从而

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{1}{x^2}\cos x\cdot(x-\operatorname{tg}x)<0,$$

故 $f(x)$ 为减函数。

由定理得

$$\frac{Af(A)+Bf(B)+Cf(C)}{3}$$

$$\leqslant\frac{A+B+C}{3}\cdot\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}.$$

利用此式及 $A+B+C=\pi$ 就能证得原式。

例 11　求证：$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[5]{5}\cdots\sqrt[n]{n}>\left(\dfrac{n!}{2}\right)^{\frac{2}{n+3}}(n>3)$.

证明　取 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in(e,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ <0,　$\therefore$　$f(x)$是减函数，又因 3, 4, $\cdots$, $n\in(e,\ +\infty)$，由定理得

$$\frac{1}{n-2}\left(3\cdot\frac{\ln 3}{3}+4\cdot\frac{\ln 4}{4}+\cdots+n\cdot\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$<\frac{1}{(n-2)^2}(3+4+\cdots+n)\left(\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),$$

故

$$(n-2)\ln(3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n)<\frac{n^2+n-6}{2}\cdot\ln\left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}\cdots\sqrt[n]{n}\right)$$

则
$$\ln(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{n})>\frac{2}{n+3}\ln\left(\frac{n!}{2}\right).$$

于是原式成立.

例 12 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边,

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

求证:
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant p.$$

其中等号成立的充要条件为 $\triangle ABC$ 是正三角形.

证明 取 $f(x)=\dfrac{x}{2p-x}$, $x\in(0, +\infty)$.

$\because$ $f'(x)=\dfrac{2p}{(2p-x)^2}>0$, $\therefore$ $f(x)$ 为增函数,

由定理得

$$\frac{1}{3}(af(a)+bf(b)+cf(c))$$
$$\geqslant\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3},$$

即

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$
$$\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+a+b+c\right),$$

亦即

$$3\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$$

$$\geqslant\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+2p,$$

移项得 $$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant 2p.$$

原式等号成立的充要条件为 $a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

下列几题用上面的定理也容易证明：

1．设 $a,\ b,\ c$ 为正数，求证：

$$3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

2．$\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+c}\geqslant\frac{3}{2}.$$

3．设 x、y、z 是互不相等的正数，p、q 是正数，求证：

$$(3x^{p-q}+y^{p-q}+z^{p-q})<(x^p+y^p+z^p)(x^{-q}+y^{-q}+z^{-q}).$$

4．求证：在锐角 $\triangle ABC$ 中，

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\cdot(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C).$$

例 13 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\sin A\cos\frac{A}{2}+\sin B\cos\frac{B}{2}+\sin C\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}$；

(2) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqslant\sin A+\sin B+\sin C$.

（1979 年上海市中学数学竞赛试题）

证明 (1) 不妨假定 $A\geqslant B\geqslant C$，则

$$\sin A\geqslant\sin B\geqslant\sin C,\quad \cos\frac{A}{2}\leqslant\cos\frac{B}{2}\leqslant\cos\frac{C}{2},$$

故由(13.2)得

$$\sin A\cos\frac{A}{2}+\sin B\cos\frac{B}{2}+\sin C\cos\frac{C}{2}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right),$$

但

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

且
$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\Bigg($由于 $0<\frac{\pi-A}{2},\ \frac{\pi-B}{2},\ \frac{\pi-C}{2}<\pi$，且

$$\frac{\pi-A}{2}+\frac{\pi-B}{2}+\frac{\pi-C}{2}=\pi,$$

故可在
$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

中分别以 $\frac{\pi-A}{2},\ \frac{\pi-B}{2},\ \frac{\pi-C}{2}$ 代替 A、B、C 即得此式$\Bigg)$，因此，

$$\sin A\cos\frac{A}{2}+\sin B\cos\frac{B}{2}+\sin C\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}.$$

(2) 设 $A\geqslant B\geqslant C$，则 $\sin A\geqslant\sin B\geqslant\sin C$，$\cos A\leqslant\cos B\leqslant\cos C$，故由(13.2)式得

$$\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C$$

$$\leqslant\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)(\cos A+\cos B+\cos C),$$

但

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2},$$

因此，

$$\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C),$$

此即

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqslant\sin A+\sin B+\sin C.$$

例 14 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\geqslant 9.$$

证明 不妨假定 $A\geqslant B\geqslant C$，则有

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\geqslant\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geqslant\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\leqslant\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\leqslant\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

由切比雪夫不等式，得

$$\begin{aligned}9=3\Big(&\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\\&\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\Big)\\&\leqslant\Big(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\Big)\\&\cdot\Big(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\Big).\end{aligned}$$

但 $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1,$$

$$\therefore\quad\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\geqslant 9.$$

例 15 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c，面积为 S，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$，并指出在什么条件下等号成立？

（1961 年第 3 届 IMO 试题）

证明 由海伦公式，得

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，于是 $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2$，

$$b^2+c^2-a^2\leqslant c^2+a^2-b^2\leqslant a^2+b^2-c^2,$$

故由切比雪夫不等式得

$$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$\leqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

或
$$48S^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)^2,$$

从而
$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

且由(13.2)式等号成立的条件知其中的等号当且仅当

$$a^2=b^2=c^2$$

或
$$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2=a^2+b^2-c^2$$

即 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

例16 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 上的高分别是 h_a, h_b, h_c，它的面积及内切圆半径分别为 S 及 r.

求证：(1) $h_a+h_b+h_c\geqslant 9r$；

(2) $a+b+c\geqslant 2\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{S}$.

证明 因为 $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$

$$\leqslant\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)^2$$

及

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

所以

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin A+\sin B+\sin C).$$

上式两边同乘以 $2R$，得

$$h_a+h_b+h_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c), \tag{13.10}$$

这里 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $h_a\leqslant h_b\leqslant h_c$，由(13.2)式得

$$3(ah_a+bh_b+ch_c)\leqslant(a+b+c)(h_a+h_b+h_c),$$

即
$$18S\leqslant(a+b+c)(h_a+h_b+h_c). \tag{13.11}$$

将 $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ 代入上式，得

$$h_a+h_b+h_c\geqslant 9r,$$

由(13.10)、(13.11)得 $18S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)^2$，

即
$$a+b+c\geqslant 2\sqrt[4]{27}\sqrt{S}.$$

例 17 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，内切圆半径为 r，求证：

$$HD+HE+HF\leqslant 3r.$$

证明 假设锐角 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a\geqslant b\geqslant c$，则不难得到 $HD\geqslant HE\geqslant HF$.

于是由(13.1)式，得

$$HD\cdot a+HE\cdot b+HF\cdot c\geqslant\frac{1}{3}(HD+HE+HF)\cdot(a+b+c),$$

但 $HD\cdot a+HE\cdot b+HF\cdot c=2S=r(a+b+c)$,

$$\therefore\ HD+HE+HF\leqslant 3r.$$

例 18 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边于 D、E、F，若 a、b、c 及 a'、b'、c' 分别表示 $\triangle ABC$ 的三边及 $\triangle DEF$ 的三边

长，求证：

$$a'b'+b'c'+c'a'\leqslant\frac{1}{4}(ab+bc+ca).$$

证明　容易求得 $\triangle DEF$ 的三边分别为 $2r\cos\frac{A}{2}$，$2r\cos\frac{B}{2}$，$2r\cos\frac{C}{2}$，这里 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径．于是

$$\begin{aligned}
&a'b'+b'c'+c'a'\\
&=4r^2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\\
&=4\cdot16R^2\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\\
&\quad\cdot\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\\
&=16R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&\quad\cdot\left(\sin A\sin B\sin\frac{C}{2}+\sin B\sin C\sin\frac{A}{2}\right.\\
&\quad\left.+\sin C\sin A\sin\frac{B}{2}\right),
\end{aligned}$$

这里 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径．

设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$\sin A\sin B\geqslant\sin C\sin A\geqslant\sin B\sin C$$

及

$$\sin\frac{C}{2}\leqslant\sin\frac{B}{2}\leqslant\sin\frac{A}{2}.$$

由(13.2)式，得

$$\begin{aligned}
&\sin A\sin B\sin\frac{C}{2}+\sin B\sin C\sin\frac{A}{2}+\sin C\cdot\sin A\sin\frac{B}{2}\\
&\leqslant\frac{1}{3}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)\\
&\quad\cdot\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right).
\end{aligned}$$

再由熟知的不等式

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

及

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & a'b'+b'c'+c'a'\\ & \leqslant R^2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)\\ & =\frac{1}{4}(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

例 19 在四面体 $ABCD$ 中，$BC=AD=a$，$AC=BD=b$，$AB=CD=c$，AB、AC、AD 和 $\triangle BCD$ 所在平面成的角分别为 α、β、γ，求证：

$$\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha\leqslant 2.$$

证明 对如此的四面体 $ABCD$，容易证明它的四个面均为全等的锐角三角形，由此知 A 在 $\triangle BCD$ 所在平面的射影 H 必在 $\triangle BCD$ 内。

经计算知四面体 $ABCD$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)},$$

这里

$$k^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

因为

$$\begin{aligned}k^2-a^2&=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)\\ &=2R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)\\ &=4R^2\sin B\sin C\cos A,\end{aligned}$$

其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

$$\therefore\quad V=\frac{8}{3}R^3\sin A\sin B\sin C\sqrt{\cos A\cos B\cos C}.$$

又 $\triangle BCD$ 的面积

$$S=\triangle ABC \text{ 的面积}=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

若令 $AH=h$，则

$$h=\frac{3V}{S}=4R\sqrt{\cos A\cos B\cos C},$$

所以

$$\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha$$
$$=R^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$
$$=4\cos A\cos B\cos C\left(\frac{1}{\sin A\sin B}+\frac{1}{\sin B\sin C}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin C\sin A}\right)$$
$$=4(\cos A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\cos B\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A$$
$$+\cos C\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B).$$

假设 $A\geqslant B\geqslant C$，注意到 A、B、C 均为锐角，则有

$$\cos A\leqslant\cos B\leqslant\cos C,$$
$$\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C\geqslant\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A\geqslant\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B,$$

由(13.2)式，得

$$\cos A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\cos B\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A+\cos C\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B$$
$$\leqslant\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$\cdot(\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A),$$

但

$$\cos A+\cos B+\cos C$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2},$$

且 $\quad\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A=1,$

$$\therefore\quad\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha\leqslant2.$$

例 20 非锐角 $\triangle ABC$ 的三内角 A、B、C 所对的边长为 a、b、c，外接圆半径为 R. 求证：

$$3(a+b+c)\leqslant\pi\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)\leqslant 9\sqrt{3}R.$$

证明 考虑函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}\quad\left(0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\because\quad y'_x=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x),$$

$$\therefore\quad \text{对一切 } x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right],\ y'_x<0\left(y'_{x=\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}\right),$$

$$y''_{x^2}=-\frac{x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x}{x^3}.$$

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y''_{x^2}<0$，显然成立，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，令

$$f(x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x,$$

则
$$f(0)=0,$$

$$f'_x(x)=2x\sin x+x^2\cos x-2x\sin x+2\cos x-2\cos x$$
$$=x^2\cos x>0,$$

$$\therefore\quad y''_{x^2}<0\ \text{对一切}\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]\text{成立}.$$

假设 $A\geqslant B\geqslant C$，由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 x 的减函数(因为 $y'_x<0$)，故 $\sin A/A\leqslant\sin B/B\leqslant\sin C/C$. 由不等式(13.2)，得

$$3\left(\frac{\sin A}{A}\cdot A+\frac{\sin B}{B}\cdot B+\frac{\sin C}{C}\cdot C\right)$$
$$\leqslant\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right)(A+B+C).$$

两边同乘以 $2R$，得

$$3(a+b+c)\leqslant\pi\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right).$$

$\because\ y''_x<0$, $\therefore\ \dfrac{\sin x}{x}$ 为 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的上凸函数，由凸函数的琴生不等式，得

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right)\leqslant\frac{\sin\dfrac{A+B+C}{3}}{\dfrac{A+B+C}{3}},$$

于是有 $$\pi\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)\leqslant 9\sqrt{3}R,$$

$$\therefore\ 3(a+b+c)\leqslant\pi\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)\leqslant 9\sqrt{3}R.$$

还要指出，由算术-几何平均不等式得

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{ABC}\leqslant\frac{1}{27}\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right)^3,$$

再由前所证

$$\sin A/A+\sin B/B+\sin C/C\leqslant 9\sqrt{3}/2\pi,$$

故 $$\frac{\sin A\sin B\sin C}{ABC}\leqslant\frac{1}{27}\cdot\frac{9^3\cdot 3\sqrt{3}}{8\pi^3}=\frac{81\sqrt{3}}{8\pi^3}.$$

对此式，还有更一般的结论：

若 $0<x_i\leqslant\pi\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，令

$$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

则有 $$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

例 21 在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{1}{\cos A\cos B}+\frac{1}{\cos B\cos C}+\frac{1}{\cos C\cos A}$$
$$\geqslant 3\left(\frac{1}{\sin A\sin B}+\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}\right).$$

证明 不妨设 $A\geqslant B\geqslant C$，注意到 A、B、C 均为锐角，则有 $\cos A\leqslant\cos B\leqslant\cos C$，且

$$\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \geqslant \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A \geqslant \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B,$$

故由切比雪夫不等式知

$$\begin{aligned}&\cos A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+\cos B \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A+\cos C \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B\\&\leqslant \frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)\\&\quad\cdot(\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B).\end{aligned}$$

但在$\triangle ABC$中,有恒等式

$$\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B=1,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\cos A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+\cos B \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A+\cos C \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B\\&\leqslant \frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C).\end{aligned}$$

上式两边同除以$\frac{1}{3}\cos A \cos B \cos C$,则得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\cos A \cos B}+\frac{1}{\cos B \cos C}+\frac{1}{\cos C \cos A}\\&\geqslant 3\left(\frac{1}{\sin A \sin B}+\frac{1}{\sin B \sin C}+\frac{1}{\sin C \sin A}\right).\end{aligned}$$

上式中的等号当且仅当$\cos A=\cos B=\cos C$或

$$\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C=\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B,$$

也即$\triangle ABC$为正三角形时成立.

例22 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,求证:

$$\frac{1}{h_a h'_a}+\frac{1}{t_b t'_b}+\frac{1}{m_c m'_c}\geqslant \frac{12}{aa'+bb'+cc'}. \qquad (13.12)$$

其中h_a, t_b, m_c分别表示$\triangle ABC$边a上的高,$\angle B$的平分线和边C对应的中线长.

证明 由平面几何知识可知,若三角形的两边不等,则这两边上的中线、高以及这两边所对角的平分线也不等,大边上的中线、高以及所对角的平分线较小. 据此,不妨设$a \geqslant b \geqslant c>0$,则有$h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$, $t_a \leqslant t_b \leqslant t_c$, $m_a \leqslant m_b \leqslant m_c$. 注意到

$$h_a \leqslant t_b \leqslant m_c,$$

得
$$h_a \leqslant t_b \leqslant m_c \Rightarrow \frac{1}{h_a} \geqslant \frac{1}{t_b} \geqslant \frac{1}{m_c}.$$

同理设 $a' \geqslant b' \geqslant c' > 0$，则

$$\frac{1}{h_a'} \geqslant \frac{1}{t_b'} \geqslant \frac{1}{m_c'}.$$

由切比雪夫不等式及不等式

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{t_b}+\frac{1}{m_c} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{S}$$

$\left(其中\ S=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_a h_a'}+\frac{1}{t_b t_b'}+\frac{1}{m_c m_c'} \\
&\geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{t_b}+\frac{1}{m_c}\right)\left(\frac{1}{h_a'}+\frac{1}{t_b'}+\frac{1}{m_c'}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{S}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{S'}=\frac{9}{SS'} \\
&=\frac{36}{(a+b+c)(a'+b'+c')} \\
&\geqslant \frac{36}{3(aa'+bb'+cc')}=\frac{12}{aa'+bb'+cc'}.
\end{aligned}$$

切比雪夫不等式可以推广为下面的形式：

若 $0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_m$，$0 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_m$，……，$0 \leqslant V_1 \leqslant \cdots \leqslant V_m$，则

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} x_k}{m}\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k}{m}\cdots\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} V_k}{m} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} x_k y_k \cdots V_k}{m}. \qquad (13.19)$$

利用(13.13)可以将例 22 推广为一般情形：

设 $\triangle A_iB_iC_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$的三边长为 a_i, b_i, c_i，且 a_i 边上的高，$\angle B_i$ 的平分线和 C_i 边对应的中线长分别为 h_{a_i}，

t_{b_i}, m_{c_i}, 则

$$\frac{1}{h_{a_1}h_{a_2}\cdots h_{a_n}}+\frac{1}{t_{c_1}t_{b_2}\cdots t_{b_n}}+\frac{1}{m_{c_1}m_{c_2}\cdots m_{c_n}}$$

$$\geqslant\frac{(2\sqrt{3})^n}{3^{n-2}}\cdot\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n+c_1c_2\cdots c_n}.$$

显然，当 $n=2$ 时，此式即退化为(13.12)。

例23 若 $A+B+C=\pi$，求证：

$$a^2(h_b^2+h_c^2-h_a^2)+b^2(h_c^2+h_a^2-h_b^2)+c^2(h_a^2+h_b^2-h_c^2)$$
$$\geqslant 324r^4$$

(其中 r 为 $\triangle ABC$ 内接圆半径)。

证明 设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2$，而

$$h_b^2+h_c^2-h_a^2\geqslant h_c^2+h_a^2-h_b^2\geqslant h_a^2+h_b^2-h_c^2,$$

从而原不等式左边 $\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\geqslant a^2h_a^2+b^2h_b^2+c^2h_c^2=3\times 2^2S^2=12S^2$.

又

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\geqslant 3r^2\cdot\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}},$$

$$\because\quad \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}},$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad S\geqslant 3\sqrt{3}\,r^2.$$

$$\therefore\quad a^2(h_b^2+h_c^2-h_a^2)+b^2(h_c^2+h_a^2-h_b^2)+c^2(h_a^2+h_b^2-h_c^2)$$

$$\geqslant 3\cdot 2^2 S^2 \geqslant 3^4\cdot 2^2 r^4 = 324r^4.$$

一般地，若 $n\in N$，有

$$a^n(h_b^n+h_c^n-h_a^n)+b^n(h_c^n+h_a^n-h_b^n)+c^n(h_a^n+h_b^n-h_c^n)$$

$$\geqslant 3^{\frac{3n+2}{2}}\cdot 2^n S^{2n}.$$

类似地，还可推得：

在 $\triangle ABC$ 中，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$m_a(p-a)+m_b(p-b)+m_c(p-c)\geqslant 3S,$$

其中 m_a，m_b，m_c 为对应边上的中线.

例 24 设 a，b，c，d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数. 求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

（1990 年第 31 届 IMO 预选题）

证明 利用柯西不等式得

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da=1, \quad (13.14)$$

不失一般性，可设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant 0$，于是 $a^3\geqslant b^3\geqslant c^3\geqslant d^3\geqslant 0$，且

$$\frac{1}{b+c+d}\geqslant\frac{1}{c+d+a}\geqslant\frac{1}{d+a+b}\geqslant\frac{1}{a+b+c}>0.$$

两次利用切比雪夫不等式，得

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

$$\geqslant\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3).$$

$$\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}$$

$$\geqslant\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d).$$

$$\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}$$

$$\geqslant \frac{1}{3\times 16}(a^2+b^2+c^2+d^2)[(b+c+d)$$

$$+(c+d+a)+(d+a+b)+(a+b+c)]$$

$$\cdot\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right). \tag{13.15}$$

由算术-几何平均不等式，得

$$[(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)+(a+b+c)]$$

$$\cdot\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$

$$\geqslant 16.$$

以此代入(13.2)式右端，并利用(13.1)式，即得

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

$$\geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant \frac{1}{3}.$$

例 25 求证：若 a, b, c 是三角形边长，且 $2p=a+b+c$，则

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}p^{n-1}\quad (n\geqslant 1). \tag{13.16}$$

(1987 年第 28 届 IMO 备选题)

此题可以推广为：

推广 1 若 a_1, a_2, $\cdots$, a_m 为正数，$m>1$，且

$$(m-1)p=a_1+a_2+\cdots+a_m,$$

则

$$\frac{a_1^n}{a_2+\cdots+a_m}+\frac{a_2^n}{a_3+\cdots+a_m+a_1}+\cdots+\frac{a_m^n}{a_1+\cdots+a_{m-1}}$$

$$\geqslant\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}p^{n-1}. \qquad (13.17)$$

证明　不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_m>0$, 则

$$a_1^n\geqslant a_2^n\geqslant\cdots\geqslant a_m^n>0,$$

$$0<a_2+\cdots+a_m\leqslant a_3+\cdots+a_m+a_1\leqslant a_1+\cdots+a_{m-1},$$

$$\frac{a_1^n}{a_2+\cdots+a_m}\geqslant\frac{a_2^n}{a_3+\cdots+a_m+a_1}\geqslant\cdots\geqslant\frac{a_m^n}{a_1+\cdots+a_{m-1}}>0.$$

由切比雪夫不等式, 得

$$(a_2+\cdots+a_m)\frac{a_1^n}{a_2+\cdots+a_m}+(a_3+\cdots+a_m+a_1)\cdot\frac{a_2^n}{a_3+\cdots+a_m+a_1}+\cdots+(a_1+\cdots+a_{m-1})\cdot\frac{a_m^n}{a_1+\cdots+a_{m-1}}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\left[(a_2+\cdots+a_m)+(a_3+\cdots+a_m+a_1)+\cdots+(a_1+\cdots+a_{m-1})\right]\cdot\left(\frac{a_1^n}{a_2+\cdots+a_m}+\frac{a_2^n}{a_3+\cdots+a_m+a_1}+\cdots+\frac{a_m^n}{a_1+\cdots+a_{m-1}}\right),$$

从而(13.17)式左边 $\geqslant\frac{m}{m-1}\cdot\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_m}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)$.

又　$$\frac{1}{m}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)\geqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\right)^n,$$

$$\therefore\quad (13.17)\text{式左边}\geqslant\frac{m}{m-1}\cdot\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_m}\cdot m\cdot\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\right)^n$$

$$=\frac{1}{(m-1)m^{n-2}}$$

$$\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_m)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{(m-1)m^{n-2}}[(m-1)p]^{n-1}$$

$$=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}p^{n-1}.$$

显然当 $m=3$ 时，(13.17)式即为(13.16)式；当 $n=1$ 时，(13.17)式即为本节例 7. 因此，(13.17)式既是(13.16)式的推广，也是例 7 的推广.

推广 2 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是正数，$m>1$,

$$(m-1)p=a_1+a_2+\cdots+a_m,$$

则

$$\frac{a_1^n}{a_2^i+\cdots+a_m^i}+\frac{a_2^n}{a_3^i+\cdots+a_m^i+a_1^i}+\cdots+\frac{a_m^n}{a_1^i+\cdots+a_{m-1}^i}$$

$$\geqslant\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-i-1}p^{n-i}. \tag{13.18}$$

其中 $n\geqslant i>1$, $n-i\geqslant 1$.

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_m>0$, 则

$$a_1^{n-i}\geqslant a_2^{n-i}\geqslant\cdots\geqslant a_m^{n-i}>0,$$

$$\frac{a_1^i}{a_2^i+\cdots+a_m^i}\geqslant\frac{a_2^i}{a_3^i+\cdots+a_m^i+a_1^i}\geqslant\cdots$$

$$\geqslant\frac{a_m^i}{a_1^i+\cdots+a_{m-1}^i}>0,$$

由切比雪夫不等式及例 4, 得

$$a_1^{n-i}\cdot\frac{a_1^i}{a_2^i+\cdots+a_m^i}+a_2^{n-i}\cdot\frac{a_2^i}{a_3^i+\cdots+a_m^i+a_1^i}+\cdots$$

$$+a_m^{n-i}\cdot\frac{a_m^i}{a_1^i+\cdots+a_{m-1}^i}$$

$$\geqslant \frac{1}{m}(a_1^{n-t}+\cdots+a_m^{n-t})\cdot\left(\frac{a_1^t}{a_2^t+\cdots+a_m^t}\right.$$

$$\left.+\frac{a_2^t}{a_3^t+\cdots+a_m^t+a_1^t}+\cdots+\frac{a_m^t}{a_1^t+\cdots+a_{m-1}^t}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{m}\cdot\frac{m}{m-1}(a_1^{n-t}+a_2^{n-t}+\cdots+a_m^{n-t})$$

$$\geqslant \frac{m}{m-1}\cdot\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\right)^{n-t} \quad \text{（幂平均不等式）}$$

$$=\frac{m}{m-1}\left[\frac{(m-1)p}{m}\right]^{n-t}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-t-1}p^{n-t}.$$

(13.18)式也可以利用证明(13.17)式的方法来证明，请读者自己完成.

推广3 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为正数，且

$$(m-k)p=a_1+a_2+\cdots+a_m,$$

则

$$\frac{a_1^n+\cdots+a_k^n}{a_{k+1}+\cdots+a_m}+\frac{a_2^n+\cdots+a_{k+1}^n}{a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1}+\cdots$$

$$+\frac{a_m^n+a_1^n+\cdots+a_{k-1}^n}{a_k+\cdots+a_{m-1}}$$

$$\geqslant k\left(\frac{m-k}{m}\right)^{n-2}p^{n-1}, \tag{13.19}$$

其中 $n\geqslant 1$, $m>k\geqslant 1$

证明 不妨设

$$a_1^n+\cdots+a_k^n\geqslant a_2^n+\cdots+a_{k+1}^n\geqslant\cdots\geqslant a_m^n+a_1^n+\cdots+a_{n-1}^n,$$

则 $$a_1\geqslant a_{k+1},\ a_2\geqslant a_{k+2},\ \cdots\cdots,\ a_{m-1}\geqslant a_{k-1}.$$

从而

$$a_{k+1}+\cdots+a_m\leqslant a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1\leqslant\cdots\leqslant a_k+\cdots+a_{m-1},$$

$$\frac{a_1^n+\cdots+a_k^n}{a_{k+1}+\cdots+a_m}\geqslant\frac{a_2^n+\cdots+a_{k+1}^n}{a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1}\geqslant\cdots$$

$$\geqslant\frac{a_m^n+a_1^n+\cdots+a_{k-1}^n}{a_k+\cdots+a_{m-1}}.$$

由切比雪夫不等式，得

$$(a_{k+1}+\cdots+a_m)\frac{a_1^n+\cdots+a_k^n}{a_{k+1}+\cdots+a_m}+(a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1)$$

$$\cdot\frac{a_2^n+\cdots+a_{k+1}^n}{a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1}+\cdots+(a_k+\cdots+a_{m-1})$$

$$\cdot\frac{a_m^n+a_1^n+\cdots+a_{k-1}^n}{a_k+\cdots+a_{m-1}}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}[(a_{k+1}+\cdots+a_m)+(a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1)+\cdots$$

$$+(a_k+\cdots+a_{m-1})]\cdot\left(\frac{a_1^n+\cdots+a_k^n}{a_{k+1}+\cdots+a_m}\right.$$

$$\left.+\frac{a_2^n+\cdots+a_{k+1}^n}{a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1}+\cdots+\frac{a_m^n+a_1^n+\cdots+a_{k-1}^n}{a_k+\cdots+a_{m-1}}\right),$$

即

$$k(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)\leqslant\frac{1}{m}(m-k)(a_1+a_2+\cdots+a_m)$$

$$\cdot\left(\frac{a_1^n+\cdots+a_k^n}{a_{k+1}+\cdots+a_m}\right.$$

$$+\frac{a_2^n+\cdots+a_{k+1}^n}{a_{k+2}+\cdots+a_m+a_1}+\cdots$$

$$\left.+\frac{a_m^n+a_1^n+\cdots+a_{k-1}^n}{a_k+\cdots+a_{m-1}}\right),$$

$$\therefore\quad (13.19)\text{式左边}\geqslant\frac{mk}{m-k}\cdot\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}{a_1+a_2+\cdots+a_m}$$

$$\geqslant\frac{mk}{m-k}\cdot\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_m}$$

$$\cdot m\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\right)^n$$

$$=k\cdot\frac{1}{(m-k)m^{n-2}}$$

$$\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_m)^{n-1}$$

$$=k\left(\frac{m-k}{m}\right)^{n-2}p^{n-1}.$$

推广 4 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为正数，且

$$(m-k)p=a_1+a_2+\cdots+a_m,$$

则

$$\frac{a_1^n+\cdots+a_k^n}{a_{k+1}^i+\cdots+a_m^i}+\frac{a_2^n+\cdots+a_{k+1}^n}{a_{k+2}^i+\cdots+a_m^i+a_1^i}+\cdots$$

$$+\frac{a_m^n+a_1^n+\cdots+a_{k-1}^n}{a_k^i+\cdots+a_{m+1}^i}$$

$$\geqslant k\left(\frac{m-k}{m}\right)^{n-i-1}p^{n-i}, \tag{13.20}$$

其中 $n\geqslant i>1$, $n-i\geqslant 1$, $m>k\geqslant 1$.

证明 (13.20)式左边 $\geqslant \dfrac{mk}{m-k}\cdot\dfrac{a_1^n+\cdots+a_m^n}{a_1^i+\cdots+a_m^i}$.

由切比雪夫不等式易证

$$a_1^{n-i}a_1^i+\cdots+a_m^{n-i}a_m^i$$

$$\geqslant\frac{1}{m}(a_1^{n-i}+\cdots+a_m^{n-i})(a_1^i+\cdots+a_m^i),$$

$$\therefore\quad \frac{a_1^n+\cdots+a_m^n}{a_1^i+\cdots+a_m^i}\geqslant\frac{1}{m}(a_1^{n-i}+\cdots+a_m^{n-i})$$

$$\geqslant\left(\frac{a_1+\cdots+a_m}{m}\right)^{n-i}$$

$$=\left(\frac{m-k}{m}\right)^{n-i}p^{n-i},$$

$\therefore$ (13.20)式左边 $\geqslant k\left(\dfrac{m-k}{m}\right)^{n-i-1}p^{n-i}$.

推广 5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R^+$，且

$$2p=\sum_{i=1}^{N}a_i,\quad n\geqslant m\geqslant 1.$$

则

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^n}{(2p-a_i)^m}\geqslant\frac{(2p)^{n-m}}{N^{n-m-2}(N-1)^m}. \tag{13.21}$$

证明 不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_N$，则

$$\frac{1}{2p-a_1} \geqslant \frac{1}{2p-a_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{2p-a_N}.$$

由切比雪夫不等式，可得

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^n}{(2p-a_i)^m} \geqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^n\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(2p-a_i)^m}\right). \tag{13.22}$$

由幂平均不等式，有

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i^n \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{N}\right)^n = \left(\frac{2p}{N}\right)^n. \tag{13.23}$$

又

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(2p-a_i)^m} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2p-a_i}}{N}\right)^m, \tag{13.24}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (2p-a_i) \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2p-a_i} \geqslant N^2, \tag{13.25}$$

即

$$2(N-1)p \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2p-a_i} \geqslant N^2,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2p-a_i} \geqslant \frac{N^2}{2(N-1)p}.$$

代入(13.24)，得

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(2p-a_i)^m} \geqslant N\left(\frac{N}{2(N-1)p}\right)^m. \tag{13.26}$$

将(13.23)、(13.26)代入(13.22)，得

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^n}{(2p-a_i)^m} \geqslant \left(\frac{2p}{N}\right)^n N\left(\frac{N}{2(N-1)p}\right)^m$$

$$= \frac{(2p)^{n-m}}{N^{n-m-1}(N-1)^m}.$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_N$ 时等号成立.

在(13.21)式中取 $N=3$, $m=1$，即为(13.16)式.

例 26 双圆 n 边形外接圆圆心到各边距离之和不小于内切圆半径的 n 倍.

证明 设双圆 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$(如图 18),

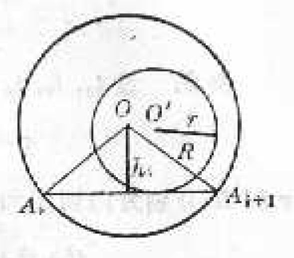


图 18

$$A_iA_{i+1}=a_i \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

外接圆和内切圆圆心分别为 O 和 O', O 到边 A_iA_{i+1} 的距离为 h_i, 外接圆和内切圆半径分别为 R 和 r, 于是本题即为证

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \geqslant nr.$$

不妨设 $a_{i1}\geqslant a_{i2}\geqslant\cdots\geqslant a_{in}$, $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 由于各三角形 $\triangle A_iOA_{i+1}$ 都是以 R 为腰的等腰三角形, 所以底边 a_i 大者其相应高 h_i 反而小, 即若

$$a_{i1}\geqslant a_{i2}\geqslant\cdots\geqslant a_{in},$$

则

$$h_{i1}\leqslant h_{i2}\leqslant\cdots\leqslant h_{in},$$

于是由切比雪夫不等式知 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_ih_i=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_{ij}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\sum_{i=1}^{n} h_i,$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n} h_i\geqslant\frac{2nS_\Delta}{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

但

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_ir,$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} h_i \geqslant \frac{2n-\dfrac{1}{2}r\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}=nr.$$

例 27 设 t_a, t_b, t_c 为 $\triangle ABC$ 三条角平分线长.

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

r 和 R 分别为内切圆和外接圆半径, 则

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant p^2-r\left(\frac{R}{2}-r\right).$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

证明 由余弦定理, 有

$$t_a^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=bc-\frac{a^2bc}{(2p-a)^2},$$

则

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2=bc+ca+ab-abc\cdot\left(\frac{a}{(2p-a)^2}+\frac{b}{(2p-b)^2}+\frac{c}{(2p-c)^2}\right).$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$, 则

$$\frac{1}{2p-a}\geqslant\frac{1}{2p-b}\geqslant\frac{1}{2p-c}>0,$$

由切比雪夫不等式, 有

$$\frac{a}{(2p-a)^2}+\frac{b}{(2p-b)^2}+\frac{c}{(2p-c)^2}$$

$$\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)\left[\frac{1}{(2p-a)^2}+\frac{1}{(2p-b)^2}+\frac{1}{(2p-c)^2}\right]$$

$$\geqslant\frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2p-a}+\frac{1}{2p-b}+\frac{1}{2p-c}\right]^2$$

$$\geqslant \frac{2p}{9}(2p-a+2p-b+2p-c)^{-2}\cdot 9^2=\frac{9}{8p},$$

$$\therefore\quad t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant bc+ca+ab-\frac{9}{8p}abc.$$

又 $$p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$pr^2=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc$$
$$=-p^3+(ab+bc+ca)p-abc,$$

故 $$bc+ca+ab=p^2+r^2+\frac{abc}{p},$$

$$\therefore\quad t_a^2+t_b^2+t_c^2\leqslant p^2+r^2-\frac{abc}{8p}.$$

注意到 $abc/p=4Rr$, 证毕.

例 28 设

$$f(x)=\log_b\frac{1}{n}[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a],$$

其中 $a\in[c,1]$,

$$c=\max\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{x_1},\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{x_2}\right\},$$

$$x_1,\ x_2\in R^+,\ b\in(1,\ +\infty),$$

n 为任意给定的自然数, $n\geqslant2$, 则

(1) $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$;

(2) 对于任意给定的自然数 k_1, k_2, 有

$$k_1f(x_1)+k_2f(x_2)<f(k_1x+k_2x).$$

这是 1990 年全国高考数学理科压轴题的一种推广形式, 原试题请见第二节例 5.

证明 (1) 只需证明

$$\frac{1+2^{x_1}+\cdots+(n-1)^{x_1}+n^{x_1}a}{n}\cdot\frac{1+2^{x_2}+\cdots+(n-1)^{x_2}+n^{x_2}a}{n}$$

$$<\frac{1+2^{x_1+x_2}+\cdots+(n-1)^{x_1+x_2}+n^{x_1+x_2}a}{n}.$$

当 $a=1$, $x_1>0$, $x_2>0$ 时,

$$1<2^{x_1}<\cdots<(n-1)^{x_1}<n^{x_1},$$

$$1<2^{x_2}<\cdots<(n-1)^{x_2}<n^{x_2},$$

由切比雪夫不等式, 得

$$\frac{1+2^{x_1}+\cdots+(n-1)^{x_1}+n^{x_1}}{n}\cdot\frac{1+2^{x_2}+\cdots+(n-1)^{x_2}+n^{x_2}}{n}$$

$$<\frac{1+2^{x_1+x_2}+\cdots+(n-1)^{x_1+x_2}+n^{x_1+x_2}}{n}.$$

当 $c\leqslant a<1$, $x_1>0$, $x_2>0$ 时, $a^2<a$, 因为

$$n^{x_1}a\geqslant n^{x_1}c\geqslant n^{x_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{x_1}=(n-1)^{x_1},$$

所以 $\quad 1<2^{x_1}<\cdots<(n-1)^{x_1}\leqslant n^{x_1}a,$

同理 $\quad 1<2^{x_2}<\cdots<(n-1)^{x_2}\leqslant n^{x_2}a.$

$$\therefore\quad \frac{1+2^{x_1}+\cdots+(n-1)^{x_1}+n^{x_1}a}{n}$$

$$\cdot\frac{1+2^{x_2}+\cdots+(n-1)^{x_2}+n^{x_2}a}{n}$$

$$<\frac{1+2^{x_1+x_2}+\cdots+(n-1)^{x_1+x_2}+n^{x_1+x_2}a^2}{n}$$

$$<\frac{1+2^{x_1+x_2}+\cdots+(n-1)^{x_1+x_2}+n^{x_1+x_2}a}{n},$$

故有 $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$.

(2) 先证 $k_1f(x_1)\leqslant f(k_1x_1)$, $k_2f(x_2)\leqslant f(k_2x_2)$, 其中当且仅当 $k_1=k_2=1$ 等号成立.

$$\therefore\quad k_1f(x_1)+k_2f(x_2)\leqslant f(k_1x_1)+f(k_2x_2).$$

今取 $\quad c_1=\max\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k_1x_1},\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k_2x_2}\right\},$

则当 $a\in[c_1, 1]$ 时, 由(1)知

$$f(k_1x_1)+f(k_2x_2)<f(k_1x_1+k_2x_2),$$

$$\therefore\quad k_1f(x_1)+k_2f(x_2)<f(k_1x_1+k_2x_2).\qquad(13.27)$$

由于 $c_1\leqslant c$, 所以 $[c,\ 1]\subseteq[c_1,\ 1]$.

故当 $a\in[c,\ 1]$ 时, (13.27) 也成立.

例 28 可以推广为:

设

$$f(x)=\log_b\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n},$$

其中 $a\in[c,\ 1]$, $c=\max\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{x_1},\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{x_2},\ \cdots,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{x_m}\right\}$, m, n 是任意给定的不小于 2 的自然数, $x_i\in R^+(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$, $b\in(1,\ +\infty)$. 则

(i) $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)<f(x_1+x_2+\cdots+x_m)$;

(ii) 对于任意给定的自然数 $k_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$, 有

$$k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_mf(x_m)$$
$$<f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m).$$

仿照例 28 的证法, 并利用 (13.13) 可证此命题, 证明略.

例 29 非负实数 $a_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{r}a_i=k>0,\quad p、q\in R^+,$$

m 为非负实数, 则

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i^p}{(m+k-a_i)}\geqslant\frac{k^pr^{1+q-p}}{(mr+kr-k)^q}.\qquad(13.28)$$

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_r\geqslant0$, 则

$$a_1^p\geqslant a_2^p\geqslant\cdots\geqslant a_r^p,$$

$$\frac{1}{(m+k-a_1)^q}\geqslant\frac{1}{(m+k-a_2)^q}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{(m+k-a_r)^q}.$$

由切比雪夫不等式得

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i^p}{(m+k-a_i)^q}\geqslant\frac{1}{r}\cdot\sum_{i=1}^{r}a_i^p\cdot\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(m+k-a_i)^q}.\tag{13.29}$$

由幂平均不等式得

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}a_i^p\geqslant\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{r}\right)^p=\left(\frac{k}{r}\right)^p,\tag{13.30}$$

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(m+k-a_i)^q}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{m+k-a_i}\Big/r\right)^q.\tag{13.31}$$

又由算术平均-几何平均之间的不等式得

$$\sum_{i=1}^{r}(m+k-a_i)\cdot\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{m+k-a_i}\geqslant r^2,$$

$$\sum_{i=1}^{r}(m+k-a_i)=mr+kr-k,$$

故

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{m+k-a_i}\geqslant\frac{r^2}{mr+kr-k}.\tag{13.32}$$

由(13.29)～(13.32)，即得

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i^p}{(m+k-a_i)^q}\geqslant\frac{k^p r^{1+q-p}}{(mr+kr-k)^q}.$$

说明：此例是1982年西德一道数学竞赛题的一种推广．原题参见本书第二节例6．

利用(13.28)式可以使许多竞赛题得到统一的证明．

1．在(13.28)式中，取

$$p=q=1,\ m=0,\ r=3,\ k=a+b+c,$$

即得1963年莫斯科竞赛题，见本书第五节例16．

2．取$p=2$，$q=1$，$r=3$，$m=0$，$k=a+b+c$，即得1988年“友谊杯”国际数学竞赛题，见第十节例11．

3．取$p=n$，$q=1$，$m=0$，$r=3$，$k=2S$，即得1987年第

28 届 IMO 预选题, 见本节例 25.

4. 取 $p=1$, $q=\frac{1}{2}$, $m=0$, $k=1$, $r=n$, 并利用柯西不等式, 即可得 1989 年第 4 届冬令营试题, 见本节例 6.

5. 取 $p=3$, $q=1$, $m=0$, $k=a+b+c+d$, $r=4$, 则可得 1990 年第 31 届 IMO 备选题, 见本节例 24.

例 30 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, p 为其半周长, 求出使下式成立的所有实数 k:

$$\frac{b+c-a}{a^k A}+\frac{c+a-b}{b^k B}+\frac{a+b-c}{c^k C}\geqslant\frac{3^{1+k}(2p)^{1-k}}{\pi}. \tag{13.33}$$

下面来论证 $k\geqslant-1$ 的所有实数是本题的解.

解 不妨设 $A\leqslant B\leqslant C$, 则因为 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上递减 ($\because g(x)=x^2f'(x)=x\cos x-\sin x$; $g(0)=0$, $g'(x)=-x\sin x<0$, $\therefore f'(x)<0$),

$$\therefore\quad \frac{\sin A}{A}\geqslant\frac{\sin B}{B}\geqslant\frac{\sin C}{C},$$

即

$$\frac{a}{A}\geqslant\frac{b}{B}\geqslant\frac{c}{C}. \tag{13.34}$$

由切比雪夫不等式, 得

$$(A+B+C)\cdot\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)\geqslant3(a+b+c),$$

即

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\geqslant\frac{3}{\pi}(a+b+c). \tag{13.35}$$

又 $\because\quad a\leqslant b\leqslant c$,

$$\therefore\quad b+c-a\geqslant c+a-b\geqslant a+b-c, \tag{13.36}$$

$$a^{-1-k}\geqslant b^{-1-k}\geqslant c^{-1-k}. \tag{13.37}$$

由切比雪夫不等式、幂平均不等式以及(13.35),得

$$\frac{b+c-a}{a^kA}+\frac{c+a-b}{b^kB}+\frac{a+b-c}{c^kC}$$

$$\geqslant\frac{1}{9}[(b+c-a)+(c+a-b)$$

$$+(a+b-c)](a^{-1-k}+b^{-1-k}+c^{-1-k})$$

$$\cdot\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{9}(a+b+c)\cdot 3^{2+k}(a+b+c)^{-1-k}$$

$$\cdot\frac{3}{\pi}(a+b+c)$$

$$=\frac{3^{1+k}(2p)^{1-k}}{\pi}. \tag{13.38}$$

(iii) 当$k<-1$时,令$b=c=1$, $a\to 0$,则

$$\frac{b+c-a}{a^kA}+\frac{c+a-b}{b^kB}+\frac{a+b-c}{c^kC}$$

$$=\frac{2-a}{a^kA}+\frac{a}{B}+\frac{c}{C}\to 0,$$

$$\frac{3^{1+k}(2p)^{1-k}}{\pi}=\frac{3^{1+k}(2+a)^{1-k}}{\pi}\to\frac{3^{1+k}\cdot 2^{1-k}}{\pi},$$

即不等式(13.33)不等号反向.

可以进一步证明:当$\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 1$, $k\geqslant\max\{1, 2(1-\lambda)\}-\mu$时,有

$$\sum\frac{(b+c-a)^\lambda}{a^kA^\mu}\geqslant 3\left(\frac{3}{\pi}\right)^\mu\left(\frac{2p}{3}\right)^{\lambda-k}. \tag{13.39}$$

在例25的推广1中,当$m=3$,得

$$\sum\frac{a^n}{b+c}\geqslant\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\sum a\right)^{n-1}. \tag{13.40}$$

利用切比雪夫不等式、加权的幂平均不等式以及不等

式(13.40)和(13.35)，得

$$\sum \frac{(b+c-a)^{\lambda}}{a^{k} A^{\mu}}=\sum \frac{(b+c-a)^{\lambda}}{a^{k+\mu}} \cdot\left(\frac{a}{A}\right)^{\mu}$$

$$\geqslant \frac{1}{3} \sum \frac{(b+c-a)^{\lambda}}{a^{k+\mu}} \cdot \sum\left(\frac{a}{A}\right)^{\mu}$$

$$\geqslant \frac{1}{3}\left[\sum(b+c-a)\right]^{1-k-\mu}$$

$$\cdot\left[\sum\left(\frac{(b+c-a)^{1+\frac{\lambda-1}{k+\mu}}}{a}\right)\right]^{k+\mu}$$

$$\cdot 3^{1-\mu} \cdot\left(\sum \frac{a}{A}\right)^{\mu}$$

$$=\left(\sum a\right)^{1-k-\mu} \cdot\left[\sum\left(\frac{2 a^{1+\frac{\lambda-1}{k+\mu}}}{b+c}\right)\right]^{k+\mu}$$

$$\cdot\left(\sum \frac{a}{3 A}\right)^{\mu}$$

$$\geqslant\left(\sum a\right)^{1-k-\mu} \cdot 3\left(\frac{1}{3} \sum a\right)^{\lambda-1} \cdot\left(\frac{1}{\pi} \sum a\right)^{\mu}$$

$$=3\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\mu} \cdot\left(\frac{2 p}{3}\right)^{\lambda-k}.$$

等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 是正三角形.

在本书的最后，我们来讨论著名的 Neuberg-Pedoe 不等式.

1891 年，纽贝格(J. Neuberg)首次发现了一个涉及两个三角形的不等式:

定理1 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1, a_2, a_3 和 b_1, b_2, b_3，它们的面积分别记为 $\triangle_1$, $\triangle_2$. 则有

$$a_1^2(b_2^2+b_3^2-b_1^2)+a_2^2(b_3^2+b_1^2-b_2^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)$$

$$\geqslant 16\triangle_1\triangle_2. \tag{13.41}$$

式中等号当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$ 时成立

但是纽贝格当时并没有给出证明，直到本世纪1943年美国 Purdue 大学教授 D. Pedoe 重新发现并证明了这个不等式．据不完全统计，它的各种美妙证明不下二十余种．1988年中国科技大学陈计先生利用柯西不等式给出了一种相当简捷的代数证法：

将(13.41)稍作变形后可得到其等价形式：

$$16\triangle_1\triangle_2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2). \qquad (13.42)$$

移项并用柯西不等式，得

$$16\triangle_1\triangle_2+2(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)$$

$$\leqslant\sqrt{[16\triangle_1^2+2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)][16\triangle_2^2+2(b_1^4+b_2^4+b_3^4)]}$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

等号当且仅当 $\triangle_1:\triangle_2=a_1^2:b_1^2=a_2^2:b_2^2=a_3^2:b_3^2$ 成立时，亦即 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$ 时成立．

1988年，陈计、马援给出了(13.41)的两种四边形推广：

定理2 设 a_i, b_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 分别表示四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 的四边长，F_1 和 F_2 分别表示它们的面积，则有

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)$$
$$+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)$$
$$+4\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}\cdot a_1a_2a_3a_4\right.$$
$$\left.+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}\cdot b_1b_2b_3b_4\right)\geqslant 16F_1F_2. \qquad (13.43)$$

式中等号当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形时成立．

证明　由 Steiner 定理，对给定边长的四边形以存在外

接圆者的面积为最大. 若以 a, b, c, d 表示四边长, p 表示它的半周长, 则最大面积可由 Brahmagupta 公式得到:

$$F=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

再由柯西不等式和算术–几何平均不等式, 得

$$\begin{aligned}
&2\sum a_i^2b_i^2+16F_1F_2\\
&\leqslant\sqrt{(2\sum a_i^4+16F_1^2)(2\sum b_i^4+16F_2^2)}\\
&\leqslant\sqrt{[(\sum a_i^2)^2+8\prod a_i][(\sum b_i^2)^2+8\prod b_i]}\\
&=(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)\sqrt{1+\frac{8\prod a_i}{(\sum a_i^2)^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{8\prod b_i}{(\sum b_i^2)^2}}\\
&\leqslant(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)\left(1+\frac{4\prod a_i}{(\sum a_i^2)^2}+\frac{4\prod b_i}{(\sum b_i^2)^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)-2\sum a_i^2b_i^2\\
&\qquad+4\left(\frac{\sum b_i^2}{\sum a_i^2}\cdot\prod a_i+\frac{\sum a_i^2}{\sum b_i^2}\cdot\prod b_i\right)\\
&\geqslant 16F_1F_2.
\end{aligned}$$

它可转化为(13.43), 等号成立条件是 $a_1^2:a_2^2:a_3^2:a_4^2:F_1=b_1^2:b_2^2:b_3^2:b_4^2:F_2$, 且这两个四边形均有外接圆. 这表明四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形.

约定 $a_i, b_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 分别表示两个凸 n 边形的边长, S、S' 分别表示其面积. 且记

$$\begin{aligned}
&a_1^2(-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+\cdots+b_n^2)+\cdots\\
&\quad+a_n^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{n-1}^2-b_n^2)\\
&=\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
&a_1^m(-b_1^m+b_2^m+\cdots+b_n^m)+a_2^m(b_1^m-b_2^m+b_3^m+\cdots+b_n^m)\\
&\quad+\cdots+a_n^m(b_1^m+b_2^m+\cdots+b_{n-1}^m-b_n^m)\\
&=\sum a_1^m(-b_1^m+b_2^m+\cdots+b_n^m).
\end{aligned}$$

定理3 在两个凸 n 边形中，若 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则有

$$\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geqslant \frac{n-2}{n}\left(4\sqrt{SS'}\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{n}\right)^2. \tag{13.44}$$

当且仅当两个凸 n 边形都为正 n 边形时等号成立.

证明 由第八节例12的证明，有

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant 4S\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{n}, \tag{13.45}$$

$$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \geqslant 4S'\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{n}. \tag{13.46}$$

由题设有

$$a_1^2 \geqslant a_2^2 \geqslant \cdots \geqslant a_n^2,$$

及

$$-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2 \geqslant b_1^2-b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2 \geqslant \cdots \geqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{n-1}^2-b_n^2.$$

由切比雪夫不等式(13.1)及(13.45)、(13.46)，得

$$\begin{aligned}&\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\\ &\geqslant \frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(n-2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\\ &\geqslant \frac{n-2}{n}\cdot 4S\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{n}\cdot 4S'\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{n}\\ &= \frac{n-2}{n}\left[4\sqrt{SS'}\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{n}\right]^2.\end{aligned}$$

若两凸 n 边形都为正 n 边形，不难推得等号成立. 反之，若等号成立，易知 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，$b_1=b_2=\cdots=b_n$，即两凸 n 边形都为正 n 边形.

显然，当 $n=3$ 时，(13.44)式即为(13.41)式，即匹多不等式.

考虑更一般的情形，有

定理 4 在两个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 中，若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，且 $m\geqslant 1$，则有

$$\sum a_1^m(-b_1^m+b_2^m+\cdots+b_n^m)$$

$$\geqslant n(n-2)\left(\frac{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{n}\right)^m\cdot(SS')^{\frac{m}{2}}. \tag{13.47}$$

当且仅当两个凸 n 边形都为正 n 边形时等号成立.

先证下面的引理：

引理 符号同上所设，则

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant n\left(\frac{4S\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

证明 ∵ 函数 $f(x)=x^m$（m 为常数，$m<0$ 或 $m>1$）在 R^+ 上是下凸函数，

$$\therefore\quad \frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}\geqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m. \tag{13.48}$$

令凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的周长 $a_1+a_2+\cdots+a_n=l$，则 (13.48) 式为

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant n\left(\frac{l}{n}\right)^m. \tag{13.49}$$

设与凸 n 边形等周的正 n 边形的周长为 l，那么这个正 n 边形的边长为 $\frac{l}{n}$，记其面积为 $S_{正n}$，则有

$$S_{正n}\geqslant S, \tag{13.50}$$

且 $$S_{正n}=n\cdot\left(\frac{l}{2n}\right)\cdot\left(\frac{l}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)=\frac{l^2}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

代入(13.50)式,得

$$\frac{l^2}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\geqslant S,\quad \therefore\ l^2\geqslant 4n\cdot S\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}(>0).$$

$$\therefore\ l^m\geqslant\left(\sqrt{4nS\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)^m. \tag{13.51}$$

将(13.51)式代入(13.49)式中,得

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant n\left(\frac{l}{n}\right)^m$$

$$\geqslant n\cdot\left(\frac{\sqrt{4nS\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}{n}\right)^m=n\left(\frac{4S\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

下面回过头来证明定理4.

证明　由已知得 $a_1^m\geqslant a_2^m\geqslant\cdots\geqslant a_n^m$,及

$$-b_1^m+b_2^m+\cdots+b_n^m\geqslant b_1^m-b_2^m+b_3^m+\cdots+b_n^m\geqslant\cdots$$
$$\geqslant b_1^m+b_2^m+\cdots+b_{n-1}^m-b_n^m.$$

于是利用切比雪夫不等式及引理,得

$$\sum a_1^m(-b_1^m+b_2^m+\cdots+b_n^m)$$

$$\geqslant\frac{1}{n}(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)\cdot(n-2)\cdot(b_1^m+b_2^m+\cdots+b_n^m)$$

$$\geqslant\frac{n-2}{n}\cdot n\left(\frac{4S\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\cdot n\left(\frac{4S'\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$=n(n-2)\left(\frac{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{m}{2}}(SS')^{\frac{m}{2}}.$$

显然,当 $m=1$ 时,有

$$\sum a_1(-b_1+b_2+\cdots+b_n)\geqslant 4(n-2)\sqrt{SS'}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

当 $m=2$ 时,即为定理3.

当 $n=3$ 时，有

$$\sum x_1^m(-b_1^m+b_2^m+b_3^m)\geqslant 3\cdot\left(\frac{16SS'}{3}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

仿照定理 4 的证法，可得

定理 5 在两个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 中，若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\begin{aligned}&a_1^mb_1^m+a_2^mb_2^m+\cdots+a_n^mb_n^m\\&\geqslant n\left(\frac{4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n}\right)^m(SS')^{\frac{m}{2}}.\end{aligned}\tag{13.52}$$

当且仅当两个凸 n 边形都为正 n 边形时等号成立.

显然，当 $n=3$ 时，有

$$a_1^mb_1^m+a_2^mb_2^m+a_3^mb_3^m\geqslant 3\left(\frac{16SS'}{3}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

当且仅当两个三角形都为正三角形时，等号成立.

定理 6 在两个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 中，若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 或 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，$p_1, p_2\geqslant 1$，$p=p_1+p_2$，则有

$$\begin{aligned}&a_1^{p_1}(-b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2})+a_2^{p_1}(b_1^{p_2}-b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2})\\&\quad+\cdots+a_n^{p_1}(b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_{n-1}^{p_2}-b_n^{p_2})\\&\geqslant n(n-2)\left(\frac{4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{p}{2}}S^{\frac{p_1}{2}}S'^{\frac{p_2}{2}}.\end{aligned}\tag{13.53}$$

证明 不失一般性，设

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n \quad 且 \quad a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n.$$

$$\because\quad a_i,\ b_i>0,$$

$$\therefore\quad a_1^{p_1}\leqslant a_2^{p_1}\leqslant\cdots\leqslant a_n^{p_1},\ b_1^{p_2}\geqslant b_2^{p_2}\geqslant\cdots\geqslant b_n^{p_2}.$$

$$\therefore\quad -b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2}\leqslant b_1^{p_2}-b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2}$$

$$\leqslant \cdots \leqslant b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_{n-1}^{p_2}-b_n^{p_2}.$$

由切比雪夫不等式，得

$$\frac{1}{n}\left[a_1^{p_1}(-b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2})+a_2^{p_1}(b_1^{p_2}-b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2})\right.$$

$$\left.+\cdots+a_n^{p_1}(b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_{n-1}^{p_2}-b_n^{p_2})\right]$$

$$\geqslant\left[\frac{1}{n}(a_1^{p_1}+a_2^{p_1}+\cdots+a_n^{p_1})\right]\left\{\frac{1}{n}\left[(-b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2})\right.\right.$$

$$+(b_1^{p_2}-b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2})+\cdots$$

$$\left.\left.+(b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_{n-1}^{p_2}-b_n^{p_2})\right]\right\}$$

$$=(n-2)\left(\frac{a_1^{p_1}+a_2^{p_1}+\cdots+a_n^{p_1}}{n}\right)\cdot\left(\frac{b_1^{p_2}+b_2^{p_2}+\cdots+b_n^{p_2}}{n}\right)$$

$$\geqslant(n-2)\cdot\left(\frac{4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{p_1}{2}}\cdot S^{\frac{p_1}{2}}\cdot\left(\frac{4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{p_2}{2}}S'^{\frac{p_2}{2}}$$

$$\geqslant(n-2)\cdot\left(\frac{4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{n}\right)^{\frac{p}{2}}S^{\frac{p_1}{2}}S'^{\frac{p_2}{2}}.$$

对于$n=3$，即三角形的情形，(13.53)式可加强，p_1，p_2只要大于0即可．即

$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的边长分别为a，b，c和a'，b'，c'，面积为S，S'，且满足$a\geqslant b\geqslant c$且$a'\leqslant b'\leqslant c'$，或$a\leqslant b\leqslant c$，且$a'\geqslant b'\geqslant c'$，$p_1$、$p_2>0$，$p=p_1+p_2$，则

$$a^{p_1}(-a'^{p_2}+b'^{p_2}+c'^{p_2})+b^{p_1}(a'^{p_2}-b'^{p_2}+c'^{p_2})$$

$$+c^{p_1}(a'^{p_2}+b'^{p_2}-c'^{p_2})$$

$$\geqslant 2^p\cdot 3^{1-\frac{p}{4}}S^{\frac{p_1}{2}}\cdot S'^{\frac{p_2}{2}}. \tag{13.54}$$